



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
PROGRAMA DE DOCTORADO EN ECONOMÍA

Ensayos en Econometría Financiera

Autor:

Miguel Angel Rivera Castro

Director de Tesis:

Prof. Dr. Juan Carlos Reboredo Nogueira

Santiago de Compostela

2012

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE
COMPOSTELA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN ECONOMIA

MIGUEL ANGEL RIVERA CASTRO

Ensayos en Econometría Financiera

UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Tesis presentada al programa de
Doctorado en Economía de la
Universidad de Santiago de Compostela
como requisito para la obtención del
Título de Doctor en Economía.

Director de Tesis:
Prof. Dr. Juan Carlos Reboredo Nogueira

13 de julio de 2012

*A mis padres,
José Miguel y Juana Maria (in memorian),
por las historias de éxito en la educación de sus hijos, delante de
todas las adversidades.*

*A mi esposa, Betania Silva Almeida,
que me enseñó las prioridades en la vida.*

*A mis hijos, Miguel y Anabel, motivo de entusiasmo
y pasión por la vida.
Al profesor Emilio José de Castro e Silva (in memorian)
por la motivación y apoyo brindado.*

Agradecimientos

La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniendo mucha paciencia, dando ánimo, acompañándome en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

En primer lugar, quiero expresar mis sinceros agradecimientos a mi esposa, Betania, por su apoyo, paciencia e incentivo. Ella me ayudó a atravesar los momentos más difíciles y me enseñó a ser siempre optimista.

Agradezco a mi director de Tesis, el profesor Dr. Juan Carlos Reboredo Nogueira por su apoyo, incentivo y orientación durante estos años. Mi eterno agradecimiento por aceptar la difícil tarea de orientación de este trabajo y contribuir decisivamente a la calidad del mismo.

A la Oficina de Relaciones Internacionales de la USC por haberme dado la oportunidad de pasar estos años en la USC.

Mi agradecimiento al profesor Dr. José García, por estar siempre disponible para consultas y debates que dieron como fruto uno de los trabajos que se presentan en esta tesis.

Al profesor Carlos Gentil, por compartir sus conocimientos en muchos campos científicos, por ser para mí ejemplo de cordialidad, motivación y apoyo en todos sus actos. Estoy realmente agradecido a él por compartir conmigo sus opiniones y conocimiento, por su energía inspiradora, entusiasmo contagiante y generosidad. Me siento feliz y honrado por haber sido su alumno y aprender con él.

A mi colega Edilson por las horas dedicadas a discutir problemas e ideas.

A todos ellos muchas gracias.

Índice general

| | |
|--|---------------|
| 1. Consideraciones Iniciales | 13 |
| 1.1. Introducción | 13 |
| 1.2. Caracterización del problema | 13 |
| 1.2.1. Objetivos | 14 |
| 1.3. Delimitación de la investigación | 14 |
| 1.4. Estructura de la tesis | 15 |
| I Aplicaciones del análisis Wavelets | 17 |
| 2. Contagio financiero y dependencia vía Wavelets | 18 |
| 2.1. Introducción | 18 |
| 2.2. Wavelets | 19 |
| 2.2.1. Medida tiempo-frecuencia | 21 |
| 2.2.2. Propiedades de la Transformada Wavelet | 22 |
| 2.2.3. Características deseables de las Wavelets | 24 |
| 2.2.4. Wavelets de Daubechies | 25 |
| 2.2.5. Análisis multi-resolución | 27 |
| 2.3. Metodología | 30 |
| 2.4. Evidencia basada en Wavelets del impacto del precio del petróleo sobre el rendimiento de las acciones | 34 |
| 2.4.1. Introducción | 34 |
| 2.4.2. Revisión bibliográfica | 38 |
| 2.4.3. Datos | 41 |
| 2.4.4. Resultados | 48 |
| 2.4.5. Consideraciones finales | 69 |
| 2.5. Un enfoque de descomposición wavelet para analizar la depen- dencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio | 71 |
| 2.5.1. Introducción | 71 |
| 2.5.2. Revisión bibliográfica | 73 |

| | |
|--|----|
| 2.5.3. Marco teórico | 76 |
| 2.5.4. Datos | 79 |
| 2.5.5. Resultados | 83 |
| 2.5.6. Discusión | 93 |
| 2.5.7. Consideraciones finales | 95 |

II Aplicaciones del análisis de fluctuaciones sin tendencia 97

| | |
|---|-----------|
| 3. Análisis de fluctuaciones sin tendencias: DFA - DCCA | 98 |
| 3.1. Introducción | 98 |
| 3.2. Marco teórico | 100 |
| 3.2.1. El movimiento browniano | 100 |
| 3.2.2. Movimiento browniano fraccionario | 103 |
| 3.3. Metodología | 105 |
| 3.3.1. DFA | 106 |
| 3.3.2. DCCA | 109 |
| 3.4. La velocidad de ajuste del precio de las acciones a la eficiencia del mercado | 111 |
| 3.4.1. Introducción | 111 |
| 3.4.2. Datos | 113 |
| 3.4.3. Resultados | 115 |
| 3.4.4. Consideraciones finales | 118 |
| 3.5. La dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio: Una aproximación con correlaciones cruzadas sin tendencia . . . | 118 |
| 3.5.1. Introducción | 118 |
| 3.5.2. Revisión de la literatura y marco teórico | 121 |
| 3.5.3. Datos | 121 |
| 3.5.4. Resultados | 121 |
| 3.5.5. Discusión | 125 |
| 3.5.6. Conclusiones | 127 |

III Aplicación de la teoría de valores extremos 128

| | |
|--|------------|
| 4. Teoría de los valores extremos | 129 |
| 4.1. Introducción | 129 |
| 4.2. Conceptos iniciales | 130 |
| 4.3. Método de estimación de la distribución de los máximos en bloques | 133 |

| | |
|---|------------|
| 4.4. Método de estimación de la colas | 133 |
| 4.5. Ley de potencias en las duraciones entre rentabilidades extremas | 135 |
| 4.5.1. Motivación | 135 |
| 4.5.2. Metodología | 136 |
| 4.5.3. Datos | 145 |
| 4.5.4. Resultados | 151 |
| 4.5.5. Conclusiones | 159 |
| Bibliografía | 160 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Wavelets Daubechies. | 26 |
| 2.2. Análisis multi-resolución usando a wavelets Daubechies (la8). . . | 29 |
| 2.3. Evolución Temporal del precio del petróleo Brent y los índices agregados. | 42 |
| 2.4. Evolución temporal del precio del petróleo Brent (línea azul) y los índices sectoriales del S&P 500 (línea roja). | 44 |
| 2.5. Evolución temporal del precio del petróleo Brent (línea azul) y los índices sectoriales del Dow Jones Stoxx Europe 600 (línea roja). | 45 |
| 2.6. Correlación wavelet entre el petróleo Brent y los índices agregados. | 48 |
| 2.7. Correlación wavelet entre el petróleo Brent y los índices sectoriales. | 50 |
| 2.8. Correlación wavelet entre el petróleo Brent y los índices sectoriales. | 51 |
| 2.9. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el S&P 500. . | 52 |
| 2.10. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el Dow Jones Stoxx Europe 600. | 53 |
| 2.11. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de Automóviles & Repuestos en Estados Unidos. | 54 |
| 2.12. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de Automóviles & Repuestos en Europa. | 55 |
| 2.13. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de Bancos en Estados Unidos. | 56 |
| 2.14. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de Bancos en Europa. | 57 |
| 2.15. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de Química en Estados Unidos. | 58 |
| 2.16. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de Química en Europa. | 59 |
| 2.17. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sec- torial de bienes Industriales en Estados Unidos. | 60 |

| | |
|---|----|
| 2.18. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de bienes Industriales en Europa. | 61 |
| 2.19. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Petróleo & Gas en Estados Unidos. | 62 |
| 2.20. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Petróleo & Gas en Europa. | 63 |
| 2.21. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Tecnología en en Estados Unidos. | 64 |
| 2.22. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Tecnología en Europa. | 65 |
| 2.23. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Telecomunicaciones en Estados Unidos. | 66 |
| 2.24. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Telecomunicaciones en Europa. | 67 |
| 2.25. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Utilities en Estados Unidos. | 68 |
| 2.26. Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Utilities en Europa. | 69 |
| 2.27. Evolución temporal del precio del petróleo WTI y las principales tasas de cambio para el período del 4 de Enero del 2000 al 7 de Octubre de 2011. | 80 |
| 2.28. Correlación wavelets entre las rentabilidades del petróleo WTI y las tasas de cambio. | 84 |
| 2.29. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio AUD-USD. | 86 |
| 2.30. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio CAD-USD. | 87 |
| 2.31. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio EUR-USD. | 88 |
| 2.32. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio GBP-USD. | 89 |
| 2.33. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio JPY-USD. | 90 |
| 2.34. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio NOK-USD. | 91 |
| 2.35. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio MXN-USD. | 92 |

| | |
|---|-----|
| 2.36. Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio TWEXB-USD. | 93 |
| 3.1. Simulación del mB unidimensional mediante la función de distribución Gaussiana de Wiener. (a) Pasos individuales de la partícula. (b) Posición de la partícula a lo largo del eje. | 99 |
| 3.2. Ilustración del escalonamiento de la variable X para dos incrementos ξ' y ξ'' , en el intervalo de tiempo entre t y $t + 2\tau$ | 102 |
| 3.3. Log-precios del DJIA, IBEX-35, Telefónica España (TEF) y la tasa de cambio EUR-USD | 114 |
| 3.4. Rentabilidades del DJIA, IBEX-35, Telefónica España (TEF) y la tasa de cambio EUR-USD. | 115 |
| 3.5. Convergencia de escala de las series temporales intradía. | 116 |
| 3.6. Exponente de Hurst promedio para 74 días. | 117 |
| 3.7. Evolución temporal del precio del petróleo WTI y los principales tipos de cambio USD. | 122 |
| 3.8. Coeficiente de correlación cruzada sin tendencia para el precio del petróleo WTI y los tipos de cambio USD. | 124 |
| 4.1. El gráfico de Hill y sus respectivos umbrales. | 138 |
| 4.2. Distribución de las duraciones para los diferentes tiempos de espera. | 140 |
| 4.3. Log-rentabilidades y sus respectivos umbrales. | 146 |
| 4.4. Histogramas de las duraciones entre rentabilidades extremas . . . | 148 |
| 4.5. Frecuencias relativas de las rentabilidades extremas por hora . . | 149 |
| 4.6. Box-plot de las duraciones entre extremos por hora del día . . . | 150 |
| 4.7. Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas absolutas. | 153 |
| 4.8. Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas positivas. | 154 |
| 4.9. Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas negativas. | 155 |
| 4.10. Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas positivas seguida de una rentabilidad extrema negativa. . . | 156 |

- 4.11. Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas negativas seguida de una rentabilidad extrema positiva. 157

Índice de cuadros

| | |
|--|-----|
| 2.1. Estadística descriptiva para las rentabilidades del petróleo Brent y de los índices agregados. | 46 |
| 2.2. Estadística descriptiva de las rentabilidades de los índices sectoriales. | 47 |
| 2.3. Estadística descriptiva para las rentabilidades diarias del petróleo WTI y las tasas de cambio durante el período del 4 de Enero de 2000 hasta el 7 de Octubre de 2011. | 82 |
| 3.1. Estadística descriptiva para las rentabilidades diarias del petróleo WTI y los tipos de cambio durante el período del 4 de Enero de 2000 hasta el 5 de Mayo de 2012. | 123 |
| 4.1. Estadísticas descriptivas de las duraciones entre rentabilidades extremas para el período del 4 de enero del año 2005 al 20 de enero del año 2012. | 147 |
| 4.2. Parámetros estimados para el ajuste q -Weibull. | 151 |
| 4.3. Parámetros estimados para el modelo lineal ACD q -Weibull. . . | 158 |

Capítulo 1

Consideraciones Iniciales

1.1. Introducción

La econometría financiera es una disciplina econométrica basada en métodos estadísticos y matemáticos dedicados al análisis de datos financieros. Este tipo de análisis sirve de soporte a varias áreas de estudio como por ejemplo, evaluación de riesgos, opciones, gestión de carteras, previsiones y eficiencia de mercados, etc. Dado que la econometría financiera aborda la aplicación de métodos econométricos a datos financieros, todos los métodos estadísticos que de una forma u otra se apliquen a datos financieros, son de interés para la econometría financiera. El área de mayor evolución en econometría financiera ha sido el de las series temporales. Por esta razón, en esta tesis aplicados esencialmente métodos econométricos para este tipo de series, métodos que además de adecuarse a las características propias de las series financieras puedan otorgar información para el entendimiento de problemas en economía y finanzas.

1.2. Caracterización del problema

Este trabajo tiene por objetivo abordar diferentes cuestiones que han sido de interés a lo largo de este tiempo de investigación, por lo que no existe una pregunta única. La caracterización de los diferentes problemas son abordados en cada una de las partes de esta tesis en función de las metodologías econométricas desarrolladas. De forma general, podemos decir que los diferentes problemas se concentran en estudiar el comportamiento de las fluctuaciones de los precios en diferentes mercados financieros y como a partir del entendimiento de estos, podemos dar respuesta a los diferentes problemas planteados en cada una de las partes de este trabajo.

1.2.1. Objetivos

Los objetivos de esta tesis es:

- Contrastar la existencia de dependencia y de contagio financiero en períodos de crisis;
- Analizar el tiempo necesario para que los precios se ajusten a un movimiento browniano fraccionario;
- Estudiar el comportamiento de los tiempos de espera entre eventos extremos.

Para dar respuesta a estas cuestiones, se han estudiado varias bases de datos con informaciones diarias e intradiarias de índices financieros. A través de los trabajos en física estadística desarrollados por Peng et al. (1994a); Podobnik y Stanley (2008) y Vuorenmaa (2006) e ingeniería desarrollados por Daubechies (1992) y Gençay et al. (2002) obtenemos los conceptos fundamentales para entender los diferentes niveles de complejidad de los objetivos que queremos alcanzar. Por tanto, este trabajo no pretende hacer una revisión histórica, teórica o metodológica exhaustiva de cada uno de los problemas, ni centrarse en un debate entre físicos y economistas sobre la capacidad de la física como campo científico útil en el estudio de los sistemas financieros¹. En este sentido, se parte de la premisa de una cierta complementariedad entre ambas ramas de la ciencia con potenciales contribuciones útiles para responder los diferentes problemas abordados.

1.3. Delimitación de la investigación

Los trabajos se concentran en series temporales de activos financieros representantes de varios sectores. Específicamente se trabaja con índices diarios y/o intradiarios de índices financieros agregados, sectoriales, índices de la tasa de cambio, índices de commodities y acciones de empresas. Las series se obtuvieron desde diferentes sitios web, entre ellas, de la Agencia de Información de Energía de EE.UU. (<http://www.eia.doe.gov>), de la base de datos de Datastream Internacional, del Banco de Inglaterra (<http://www.bankofengland.co.uk>) y de la Reserva Federal del Banco de Saint Louis (<http://www.frbstlouis.com>).

¹Una discusión detallada puede ser encontrada en Yakovenko (2008) y Burda et al. (2003), entre otros.

1.4. Estructura de la tesis

La tesis está dividida en 3 partes, dispuestos de acuerdo con las cuestiones que abordan:

- Parte I: Aplicaciones del análisis Wavelets
 - El segundo capítulo desarrolla la teoría y las metodologías del análisis wavelets y se hacen dos aplicaciones: en primer lugar se examina la relación entre el mercado del petróleo y los mercados de valores de Europa y los EE.UU. a nivel agregado y sectorial y en segundo lugar se estudia la relación entre el precio del petróleo y los tipos de cambio. En ambas aplicaciones se utiliza el análisis de correlación y de correlación cruzada utilizando el análisis wavelet multi-resolution.
- Parte II: Aplicaciones del análisis de fluctuaciones sin tendencia
 - El tercer capítulo desarrolla el contexto teórico y las metodologías del análisis de fluctuaciones sin tendencia y se hacen dos aplicaciones: en primer lugar se analiza el tiempo que el mercado necesita para ajustar los precios a la forma débil de la hipótesis de eficiencia de mercado usando el método *Detrended Fluctuation Analysis* (DFA) y en segundo lugar se estudia la relación entre el precio del petróleo y los tipos de cambio usando el método *Detrended Cross-correlation Analysis* (DCCA)
- Parte III: Aplicación de la teoría de valores extremos
 - El cuarto capítulo desarrolla la teoría de los valores extremos y se estudia la existencia de leyes de potencia en las duraciones entre rentabilidades extremas.

Los resultados que se exponen a lo largo de la tesis han sido documentados en 5 artículos de investigación titulados:

1. Wavelet-based evidence of the impact of oil price shocks on stock returns.
2. A wavelet decomposition approach to crude oil price and exchange rate dependence.
3. How fast do stock prices adjust to market efficiency? Evidence from a detrended fluctuation analysis.

-
4. Oil and US dollar exchange rate dependence: A detrended cross-correlation approach.
 5. Power-laws in time durations between extreme returns.

Parte I

Aplicaciones del análisis Wavelets

Capítulo 2

Contagio financiero y dependencia vía Wavelets

2.1. Introducción

Las wavelets surgen como una nueva forma de caracterizar una serie temporal de acuerdo con la cual una serie se puede representar diferentes escalas temporales y es posible escoger la relación de compromiso deseada entre la resolución temporal y la frecuencia. Con la transformada wavelet es posible manejar entre diversas formas de representación en el dominio tiempo-frecuencia. Los diferentes niveles de detalles en cada representación constituyen informaciones contenidas en diferentes bandas de frecuencias, de forma que el análisis de multi-resolución es una forma de seccionar el espacio en diversas fajas de frecuencias no superpuestas. Es posible así segregar informaciones de diferentes fajas espectrales. Todas esas propiedades del análisis wavelet aparecen debido a la relación de escala que satisface las funciones de base.

Las wavelets son productos de la colaboración de varias áreas, desde la matemática y la física pura, hasta la economía, ingeniería y la teoría del procesamiento de señales. Varios trabajos independientes en esas áreas buscaban objetivos semejantes, a pesar de utilizar enfoques diferentes: buscaban nuevas formas de representar señales en el dominio tiempo-frecuencia. Las diversas líneas de investigación convergieron a un punto al final de la década del 80, cuando se formaliza la teoría de las wavelets. La unificación de todos los pensamientos se convirtió un factor primordial para la posterior popularidad de las wavelets, impulsando así nuevas investigaciones en el área.

La teoría es extensa, no siendo posible en un único texto ofrecer todas las informaciones. Diversos libros existen sobre wavelets y sus aplicaciones entre ellos los más citados son: Bruce y Gao (1996); Daubechies (1992); Gençay et al.

(2002); Nason (2008); Percival y Walden (2000). La mayoría de estos textos están dedicados a un público que ya tenga algún conocimiento sobre el asunto, y mismo los textos introductorios asumen una maduración y dedicación del lector.

Wavelets son útiles en varias aplicaciones, como el análisis y reconstrucción de sonidos, llevando al desarrollo de un nuevo algoritmo con varias características atractivas, de descomposición de la información de la señal visual (Mallat, 1998). Análisis de señales sísmicos, señales biomédicas, modelado geométrico, reconocimiento y síntesis del habla, reducción del ruido, análisis de la varianza y compresión de datos, son apenas algunas de las aplicaciones para las wavelets.

2.2. Wavelets

Las wavelets son funciones $\psi_{s,u} \in L^2(\mathbb{R})$ generadas a partir de dilataciones s y traslaciones u de una función ψ , llamada wavelet madre, tales que la familia $\{\psi_{s,u}\}_{s,u \in \mathbb{R}}$ constituye una base para $L^2(\mathbb{R})$. Además de eso, las funciones wavelets deben poseer momento de orden cero nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (2.1)$$

El factor de normalización $|s|^{\frac{1}{2}}$ es escogido de forma que $\|\psi_{s,u}\| = \|\psi\|$ para todo s y u y se asume entonces que $\|\psi\| = 1$. La función ψ es llamada wavelet madre, pues es a partir de ella que es generada una familia de wavelets, a través de la transformación dada en la Ecuación(2.1).

Las funciones wavelets más importantes poseen soporte compacto¹ o decaen exponencialmente a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Esto significa que las wavelets son funciones que poseen una buena localización en el tiempo, contribuyen localmente en el análisis de funciones, al contrario de lo que ocurre en las funciones de base del análisis de Fourier (seno y coseno), que son no nulas en todo intervalo de definición y, por lo tanto, contribuyen globalmente.

Se desea que la familia de funciones $\{\psi_{s,u}\}$ forme un sistema ortonormal completo para el sub-espacio $L^2(\mathbb{R})$, esto significa que cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser representada en términos de las funciones $\psi_{s,u}$. Dependiendo de la aplicación, es posible escoger diferentes familias de wavelets. Por ejemplo, escogiendo parámetros s y u que varíen continuamente en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$,

¹El soporte de la función, intervalo en que esta asume valores diferentes de cero, es un conjunto compacto. Un subconjunto S de un espacio topológico X será compacto cuando cualquier recubrimiento abierto de S admite un subrecubrimiento finito de S . Un soporte compacto nos interesa apenas cuando el dominio sea limitado.

donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La Transformada Wavelets Continua (TWc) de f puede ser representada por:

$$W_c f(s, u) = \langle \psi_{s,u}, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt, \quad (2.2)$$

correlacionando f con el átomo wavelet TWc.

Si ψ satisface la siguiente condición

$$\int |\omega|^{-1} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty, \quad (2.3)$$

donde $\widehat{\psi}$ es la transformada de Fourier de ψ ,

$$\widehat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) \exp^{j\omega t} dt, \quad (2.4)$$

entonces W_c es una isometría² de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$. EL mapeado W_c es llamado de “transformada continua wavelet” (ver, Daubechies, 1992; Gençay et al., 2002; Percival y Walden, 2000).

La Ecuación (2.3) es llamada condición de admisibilidad. Una vista inicial sobre esta revela que ψ debe ser tal que $\widehat{\psi} = 0$, o, de forma equivalente, $\int \psi(t) dt = 0$ (ψ posee momento de orden cero nulo). Por razones prácticas, se considera que ψ decae suficientemente, por lo tanto, la condición (2.3) se torna equivalente a escoger ψ con momento de orden cero nulo, tal y como lo expresa la ecuación (2.1).

Para algunas aplicaciones, incluyendo análisis de series temporales, se desea restringir los valores de los parámetros s y u en la Ecuación (2.2) a un subconjunto discreto. Se fija entonces el paso de dilatación $s_0 > 1$ y el paso de traslación $u_0 \neq 0$. La familia de wavelets queda entonces, para $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-\frac{j}{2}} \psi(s_0^{-j} t - k u_0), \quad (2.5)$$

Lo que corresponde a escoger $s = s_0^j$ y $u = k u_0 s_0^j$, lo que muestra que el parámetro de traslación u depende del parámetro de dilatación s . Para valores grandes de j , el factor de dilatación es grande y consecuentemente la función ψ_j se torna bastante espaciada y el paso de traslación se torna subsecuentemente menor $u_0 s_0^j$, adaptándose al nuevo tamaño de la función dilatada. Para valores de j negativos ocurre lo contrario, la función ψ_j queda bien concentrada y el paso de traslación se torna menor.

²Isometría es un mapeado biyectivo entre dos espacios métricos que preserva las distancias. Sea T el mapeado y $d(\cdot, \cdot)$ la función de distancia, entonces $d(T(f), T(g)) = d(f, g)$. Isometrías son a veces llamadas de Transformaciones Congruentes.

La transformada de wavelet discreta (W_d) está asociada a la wavelet discreta en la Ecuación (2.5). Este mapea una función f en una secuencia indexada en \mathbb{Z}^2 ,

$$(W_d f)_{j,k} = \langle \psi_{j,k}, f \rangle = s_0^{-\frac{j}{2}} \int f(t) \psi^*(s_0^{-j} t - k u_0) dt. \quad (2.6)$$

Si ψ es admisible (satisface una condición semejante a la condición (2.3), ya que se trata ahora del caso discreto) y ψ poseer un decaimiento suficiente grande, entonces, W_d es un mapeado de $L^2(\mathbb{R})$ en $l^2(\mathbb{Z})$. En general, W_d no posee una inversa limitada en todo el dominio, pero si tuviera, esto es, si para algún $A > 0, B < \infty$,

$$A \|f\|^2 < \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{j,k}, f \rangle|^2 < B \|f\|^2, \quad (2.7)$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces el conjunto $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ es llamado frame. En esta situación es posible construir algoritmos numéricos estables para reconstruir f a partir de sus coeficientes wavelet $\langle \psi_{j,k}, f \rangle$. En particular,

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j,k} \langle \psi_{j,k}, f \rangle \psi_{j,k} + R, \quad (2.8)$$

donde el resto R es tal que

$$\|R\| \leq 0 \left(\frac{B}{A} - 1 \right) \|f\|, \quad (2.9)$$

para frames en que $A = B$, llamados frames estrechos, tendremos un resto $R = 0$. Para valores de A y B tales que B/A está próximo de 1, el término del error podrá ser omitido, por ejemplo, este es el caso de descomposición y reconstrucción de señales musicales y otros sonidos.

Si los $\psi_{j,k}$ son normalizados ($\|\psi_{j,k}\| = 1$), la redundancia es medida por los límites del frame A y B . Cuando los vectores del frame fuesen linealmente independientes tendremos $A \leq 1 \leq B$. En este caso el error solo será nulo cuando la igualdad sea válida, o sea, cuando los vectores del frame sean ortonormales.

2.2.1. Medida tiempo-frecuencia

Denotemos

$$d_{j,k} = \langle \psi_{j,k}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}^*(t) dt, \quad (2.10)$$

donde $\psi_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$ a las funciones wavelets $\psi_{j,k}$ donde $j, k \in \mathbb{Z}$ se les denomina wavelets diádicas.

En la sección 2.2.3 veremos que el conjunto de funciones $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, y por tanto, toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede expresarse a partir de estos $d_{j,k}$ que llamaremos coeficientes wavelets, de la forma:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (2.11)$$

Las funciones wavelets $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ nos proporcionan un muestreo diádico del plano tiempo-frecuencia, y constituyen un recubrimiento del mismo. El muestreo en escalas se hace de forma diádica, tomando s de la forma $s = 2^j$. Para j fijo, el muestreo temporal se hace considerando trasladados enteros. De esta forma, y considerando la expresión (2.11), una señal f puede representarse a partir de una aproximación de la misma a cierta escala 2^j más una serie de detalles añadidos. Cada aproximación se especifica por una malla discreta de muestras que proporcionan medias locales de la función sobre entornos de tamaño proporcional a 2^j . Los detalles a una determinada escala j , $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{j,k}, f \rangle \psi_{j,k}$, pueden verse como la diferencia entre las aproximaciones de la señal correspondientes a dos escalas consecutivas. De esta forma, calculando las sucesivas aproximaciones de f podemos descomponer el espacio de funciones $L^2(\mathbb{R})$ en espacios de detalles a todas las resoluciones.

2.2.2. Propiedades de la Transformada Wavelet

A continuación se presentan las principales propiedades de la transformada wavelets:

- **Linealidad:** denotemos por $d_{j,k}$ y $d'_{j,k}$ los coeficientes wavelets de las funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ respectivamente, correspondientes a la escala j y a la traslación por k . Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [af(t) + bg(t)] \psi_{j,k}^*(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} af(t) \psi_{j,k}^*(t) dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} bg(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = ad_{j,k} + bd'_{j,k}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

- **Traslación:** Consideremos ahora $f(t - \tau)$. Entonces

$$\begin{aligned}
d'_{j,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \psi_{j,k}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \psi^* \left(\frac{t-2^j k}{2^j} \right) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \psi^* \left(\frac{t+\tau-2^j k}{2^j} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \psi^* \left(\frac{t}{2^j} - k + \frac{\tau}{2^j} \right) dt,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

para que $d'_{j,k}$ sea un coeficiente wavelet de $f(t-\tau)$ debe verificarse que $2^j \tau \in \mathbb{Z}$, esto es, $\tau = 2^{j'} k, k \in \mathbb{Z}, j' \geq j$, con lo que

$$d'_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \psi^* \left(\frac{t}{2^j} - k + \frac{\tau}{2^j} \right) dt = d_{j,k-\tau/2^j}, \quad -\infty < j \leq j'. \tag{2.14}$$

- **Cambio de escala:** sea $d_{j,k}$ el coeficiente correspondiente $f(t)$. Consideremos el cambio de escala $f(st)$, con $s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
d'_{j,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(st) \psi_{j,k}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(st) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \psi^* \left(\frac{t-2^j k}{2^j} \right) dt = \\
&\quad \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{1}{s 2^{\frac{j}{2}}} \psi^* \left(\frac{u}{s 2^j} - k \right) dt.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Por tanto, para que $d'_{j,k}$ se corresponda con un coeficiente wavelet deberá ser $2^j s = 2^{j'}$ para algún $j' \in \mathbb{Z}$, esto es, $s = 2^{j'-j}$. Luego si $q = j' - j$,

$$d'_{j,k} = \frac{1}{2^q} d_{j+q,k}. \tag{2.16}$$

Los cambios de escala que no sean potencias de 2 requieren interpolación. Podemos proceder de dos maneras: interpolando la función y posteriormente calculando el desarrollo wavelet, o realizar una interpolación entre los coeficientes wavelets.

- **Localización temporal:** Supongamos que queremos estudiar una señal alrededor de $t = t_0$. Veamos qué coeficientes wavelets proporcionan información para dicho entorno. Si el soporte de $\psi(t) = [k_1, k_2]$, entonces el soporte de $\psi_{t,k}(t) = [(k_1 + k)2^j, (k_2 + k)2^j]$. Por tanto, a escala 2^j , los

coeficientes que nos interesan serán aquellos para los que

$$(k_1 + k)2^j \leq t_0 \leq (k_2 + k)2^j,$$

o lo que es equivalente,

$$2^{-j}t_0 - k_2 \leq k \leq 2^{-j}t_0 - k_1,$$

Recíprocamente, dado $d_{j,j}$ la región de la señal a la que corresponde será aquella para la que

$$(k_1 + k)2^j \leq t \leq (k_2 + k)2^j.$$

- **Localización de frecuencia:** como $\hat{\psi}_{j,k}(\omega) = 2^{j/2}\hat{\psi}(2^j\omega) \exp^{-i2^j k\omega}$,

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{j,k}^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}2^{j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\hat{\psi}^*(2^j\omega) \exp^{i2^j k\omega} d\omega.$$

Supondremos wavelets con energía concentrada mayoritariamente en $[\omega_1, \omega_2]$, esto es, $\hat{\psi} \simeq 0$ fuera de $[\omega_1, \omega_2]$. A escala 2^j ,

$$\text{soporte}\hat{\psi}_{j,k}(\omega) = \left[\frac{\omega_1}{2^j}, \frac{\omega_2}{2^j} \right].$$

Por tanto, el coeficiente wavelet $d_{j,n}$ influye en la componente de frecuencia correspondiente a ω_0 si

$$\frac{\omega_1}{2^j} \leq \omega_0 \leq \frac{\omega_2}{2^j}.$$

Usualmente se toman escalas logarítmicas, con lo que la condición anterior puede escribirse como $\log_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \leq \log_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} \right)$.

Recíprocamente, para una escala 2^j , las frecuencias comprendidas en el intervalo $\left[\frac{\omega_1}{2^j}, \frac{\omega_2}{2^j} \right]$ serán las que influyen en el desarrollo de la señal en esa escala.

2.2.3. Características deseables de las Wavelets

La calidad de una base wavelets para un conjunto de señales que se está estudiando es mejor cuanto mayor sea el número de coeficientes wavelets producidos $\langle f|\psi_{j,n} \rangle$ que sean próximos de un valor nulo. Se puede decir que se está eliminando al máximo la cantidad de informaciones redundantes para la

representación de una señal, al encontrarse una buena base.

En general, para lidiar con familias genéricas de señales, algunas características deseables pueden ser inferidas, por ejemplo considerando las relación con la regularidad de la señal. Para este caso, la propiedad más importante es el llamado número de momentos nulos de la wavelets.

Una wavelet ψ posee p momentos nulos si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \text{para } 0 \leq k \leq p. \quad (2.17)$$

O sea, ψ es ortogonal a cualquier polinomio de grado $p-1$. Esto quiere decir que su función de escala correspondiente puede generar cualquier polinomio de grado menor que p . Por medio de la transformada con esa wavelets es posible, entonces, separar la parte más regular de una señal de sus irregularidades, las cuales solo serán consideradas por los coeficientes de detalle.

Otra característica deseable de una wavelets es la de ser de soporte compacto. Un soporte compacto de tamaño K de una wavelets ψ garantiza que, en cada escala 2^j , existan K wavelets cuyo soporte incluye una cierta singularidad aislada de una señal f . Dentro de esa faja de influencia de la singularidad son generados grandes coeficientes. Lo que se desea es disminuir el tamaño del soporte de ψ , para minimizar el número de coeficientes de gran amplitud de la transformada y así encontrar una base con buena representación del tipo de señal.

2.2.4. Wavelets de Daubechies

En las aplicaciones que se hacen en este trabajo usamos la wavelets de Daubechies. A continuación hacemos una pequeña revisión de la misma³. Si la familia $\{\psi_{j,k}\}$ es una base de wavelets ortonormal, y la wavelet $\psi(x)$ es suave, entonces debe tener momentos nulos y cuanto mayor suavidad, más cantidad de momentos nulos.

En 1988 Ingrid Daubechies (Daubechies, 1992), con el interés de construir bases ortogonales de funciones suaves y con el requerimiento de varios momentos nulos, pudo construir una familia de bases ortonormales, suaves y de soporte compacto. Las wavelets de Daubechies son las que tienen mayor cantidad de momentos nulos para su soporte. En la figura 2.1 se puede observar algunas de las waveletes de la familia daubechies.

De lo anterior tenemos sólo coeficientes finitos del filtro de la escala h_k que son no nulos, y , además, su longitud es $2N$. Está demostrado por (Daubechies,

³Para mayores detalles ver (Daubechies, 1992).

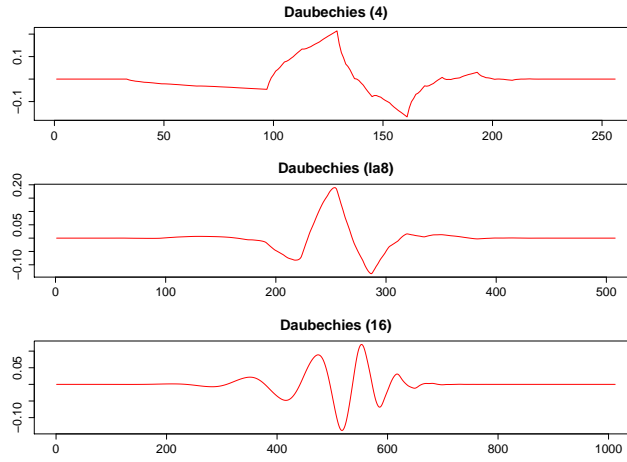
1992) que para que la función de escala ϕ y la wavelet ψ sean regulares, el filtro de la función de escala debería ser de la forma,

$$H_N(\omega) = \left(\frac{1 + \exp^{-2\pi i \omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega), \quad (2.18)$$

con $N \geq 1$, y \mathcal{L} un polinomio trigonométrico.

Teniendo en cuenta que se debe cumplir la condición de una función periódica de período 2π que verifica $1 = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2$. De esta forma, es posible hallar los coeficientes para cada N luego de realizar varias operaciones algebraicas.

Figura 2.1: Wavelets Daubechies.



Algunas de las wavelets pertenecientes a la familia Daubechies

La Función de escala que la familia de wavelets de Daubechies está gobernada por un conjunto de N (entero par) coeficientes $p_k : k = 0, 1, \dots, N-1$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se tendrán la wavelet y la función de escala que llamaremos de orden N , y denotamos ψ_N y ϕ_N .

La función de escala $\phi_N(x)$ satisface la relación de dos escalas:

$$\phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N(2x - k). \quad (2.19)$$

La wavelet madre puede escribirse,

$$\psi_N(x) = \sum_{k=2-N}^1 q_k \phi_N(2x - k). \quad (2.20)$$

En las ecuaciones (2.19) y (2.20), p_k y q_k son los coeficientes del filtro de la función de escala y de la wavelet correspondiente, cuyos soportes son,

respectivamente,

$$\text{soporte } \phi_N(x) = [0, N - 1]. \quad (2.21)$$

$$\text{soporte } \psi_N(x) = [1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}]. \quad (2.22)$$

En su trabajo, (Daubechies, 1992) encontró la relación entre momentos nulos y regularidad de la wavelet $\psi_N(x)$ y de la función de escala $\phi_N(x)$. Una condición necesaria y suficiente para tener m momentos nulos es que las trasladadas enteras de la función de escala $\phi_N(x)$ interpolen polinomios de grado hasta m , es decir, que para cada $k, 0 \leq k \leq m$ existan constantes tales que,

$$x^k = \sum_i c_i \phi_i(x). \quad (2.23)$$

Estos coeficientes c_i estarán dados por los momentos, es decir,

$$c_i = M_i^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x - i) dx. \quad (2.24)$$

Está demostrado que $m = N/2 - 1$ para la función de escala $\phi_N(x)$ y también que existe un $\lambda > 0$ tal que $\phi_N(x)$ tiene $\lambda(N/2 - 1)$ derivadas continuas.

2.2.5. Análisis multi-resolución

Una señal puede ser visto como un componente suave adicionado de fluctuaciones y detalles. La distinción entre lo que es suave y lo que son detalles es hecha de acuerdo con el nivel de resolución empleado, esto es, una escala a partir de las cuales los detalles no pueden ser distinguidos. Un análisis de multi-resolución (MRA) es una forma de representar una función en diferentes resoluciones.

De esta forma, nuestro objetivo ahora es construir funciones wavelets de forma que la familia de trasladados y dilatados $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ sea una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. A grandes rasgos, un MRA es una sucesión de espacios encajados $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, donde las proyecciones de una función f sobre cada espacio V_j se corresponde con las distintas aproximaciones de la misma a cada escala 2^j . La importancia de construir un MRA radica en que toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ queda representada por el límite de sus sucesivas aproximaciones. De esta forma veremos que para todo MRA existe una función wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ cuyos trasladados y dilatados $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Estudiar una señal desde esta nueva perspectiva, esto es, con distinta reso-

lución para distintas frecuencias, es particularmente útil cuando ésta presenta frecuencias altas para intervalos de tiempo pequeños, y frecuencias bajas para intervalos temporales amplios. En la práctica, un MRA está diseñado de manera que proporcione una buena resolución en tiempo para altas frecuencias, y una buena resolución frecuencial pero mala temporal para bajas frecuencias. Por esto, a gran escala (visiones globales de la señal) se tienen mejor localizadas las frecuencias pero un intervalo temporal más disperso, mientras que a pequeña escala (visiones detalladas de la señal), localizamos mejor temporalmente, si bien perdemos resolución en frecuencias. Más formalmente,

Definición 2.1 *Un análisis MRA se define como una sucesión decreciente de espacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$*

$$\dots V_{j+1} \subset V_j \subset \dots V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots \subset V_{-j} \subset V_{-(j+1)} \dots \quad (2.25)$$

que verifica:

- I. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$.
- II. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_0$.
- III. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$.
- IV. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2 \in (\mathbb{R})$.
- V. *Existe una función $\phi \in V_0$ tal que $\{\phi(t - k) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0 . La función ϕ se conoce como función de escala o padre wavelet. Esto es, un MRA queda caracterizado por una función de escala que genera una base del espacio V_0 y a partir de la cual se generan bases de los espacios V_j .*

Estas propiedades nos indican por ejemplo la idea de causalidad en el análisis MRA, ella implica que toda la información en un nivel de resolución 2^{-j-1} está contenida en la resolución 2^{-j} y, por lo tanto, apenas la versión de más alta resolución es necesaria para obtenerse una representación más abstracta de la señal original. También nos indican que se garantiza que los sub-espacios V_j sean invariantes por traslaciones múltiples de 2^j y garantiza que cambios de escala por el factor de 2^j son capaces de cambiar la resolución por un factor de 2^{-j} .

A través de MRA se sabe que $V_j \subset V_{j-1}$ y, por lo tanto, una función en V_j puede ser escrita en términos de un conjunto de funciones que constituyen una base para V_{j-1} . En particular, para $j = 0$,

$$\phi(t) = \sum_n h_n \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n), \quad (2.26)$$

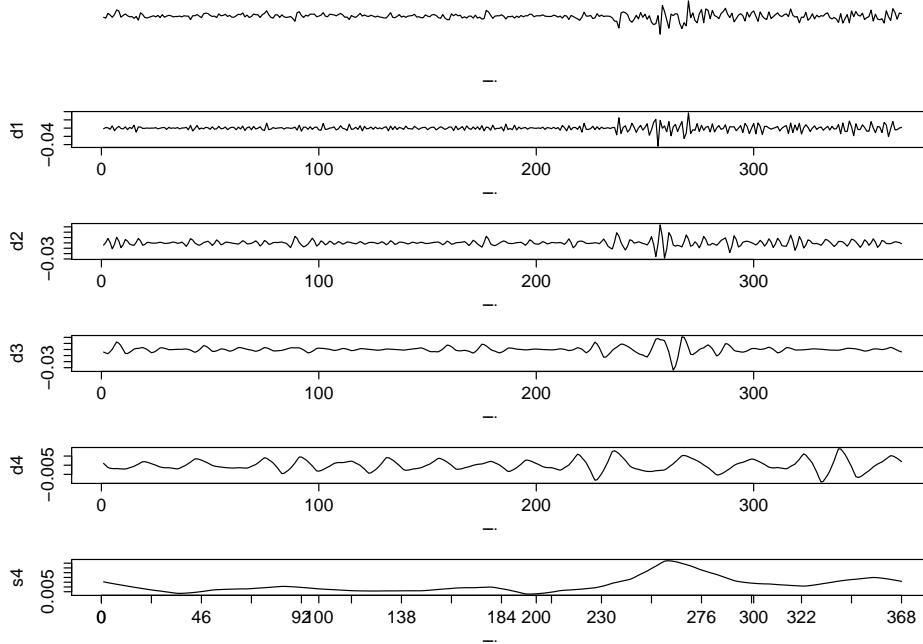
en donde $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$.

De forma semejante, como $W_j \subset V_{j-1}$, se obtiene, para el caso $j = 0$,

$$\psi(t) = \sum_n g_n \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n), \quad (2.27)$$

en donde $g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle$.

Figura 2.2: Análisis multi-resolución usando a wavelets Daubechies (la8).



El panel superior corresponde a la serie temporal analizada y los paneles subsecuentes al análisis multi-resolución.

Los coeficientes h_n y g_n son, respectivamente, los coeficientes de filtro relacionados con la función de escala y la función wavelet. Estos coeficientes determinan completamente esas funciones, o sea, todo lo que es necesario para un análisis wavelet son los coeficientes del filtro. Apenas conocerlos es suficiente para determinar el valor de la función en cualquier punto, con la precisión deseada a través de un algoritmo recursivo. Se sabe que los coeficientes g_n pueden ser determinados a partir de h_n y vice-versa. Además de eso, ellos no pueden asumir cualquier valor, una primera restricción puede ser obtenida,

bastando por tanto integrar ambos lados de las ecuaciones (2.26) y (2.27) recordando aún que se busca una base ortonormal y, por lo tanto, la norma L^2 de las funciones de base es unitaria. En la figura 2.2 se puede observar la descomposición hecha por el análisis de multi-resolución de una wavelet Daubechies de mínima asimetría de tamaño 8.

2.3. Metodología

En un contexto de series temporales, la característica más relevante de los wavelets es su capacidad para descomponer series de tiempo en componentes diferentes que varían en diferentes frecuencias temporales. En lo que sigue, se describen los conceptos wavelet más importantes utilizados en esta investigación. En nuestro análisis, hemos considerado la transformada wavelet discreta, ya que es una manera eficiente de estudiar las propiedades de multi-resolución⁴.

Las dos funciones básicas de wavelet, el wavelet padre ϕ y la wavelet madre ψ , pueden ser re-escaladas y trasladadas para formar una base en un espacio Hilbert de funciones integrables cuadráticas ($f \in L^2$). Los wavelets padres mejoran la representación de las partes blandas o frecuencias bajas de una señal con una integral igual a 1, y las wavelets madres son útiles para describir los detalles de los componentes de alta frecuencia con el mismo número integral igual a 0. Los wavelets padre y madre son formalmente definidos por las funciones:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi \left(\frac{t - 2^j k}{2^j} \right), \quad (2.28)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi \left(\frac{t - 2^j k}{2^j} \right), \quad (2.29)$$

donde $j = 1, \dots, J$ es el parámetro de escala en una descomposición de nivel J y k es el parámetro de traslación. La tendencia a lo largo de la escala de la serie de tiempo es capturada por el wavelet padre, mientras que la wavelet madre describe las fluctuaciones en la tendencia. En particular, la aproximación wavelet ortogonal a una continua serie de señales $y(t)$ en $L^2(\mathbb{R})$ está dada por:

$$y(t) = \sum_k s_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J,k} \psi_{J,k}(t) + \sum_k d_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t), \quad (2.30)$$

⁴Para una revisión más detallada del análisis wavelet, ver Percival y Walden (2000) and Gençay et al. (2002).

donde k va desde 1 hasta el número de los coeficientes en el nivel especificado y donde J es el número de los niveles de multi-resolución (escalas). El componente suave y los coeficientes de componente de detalle $s_{j,k}$ y $d_{j,k}$ pueden ser estimados con las siguientes integrales:

$$s_{J,k} = \int y(t) \phi_{J,k}(t) dt, \quad (2.31)$$

$$d_{j,k} = \int y(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (2.32)$$

Estos coeficientes son una medida de la contribución de la función wavelet correspondiente a la señal total. El factor de escala 2^j se denomina el factor de expansión, mientras que el parámetro de transferencia $2^j k$ se refiere a la ubicación desde el nivel $j = 1, \dots, J$ asociado con la escala $[2^{j-1}, 2^j]$.

En este trabajo se utiliza la transformada wavelet discreta de superposición máxima (MODWT), que descompone una señal en los niveles J . En teoría, esto requiere la aplicación de pares de filtros J . La operación de filtrado del nivel j^{th} consiste en aplicar un wavelet padre re-escalado para producir un conjunto de coeficientes de detalles y una wavelet madre re-escalada para producir un conjunto de coeficientes de escala. Este procedimiento supera algunas de las dificultades asociadas con las transformadas wavelets discretas. Especialmente, el estimador de la varianza basado en los coeficientes del MODWT es asintóticamente más eficiente que una basada en los coeficientes de la transformada wavelet discreta. Así, es posible calcular eficientemente la varianza wavelet y la covarianza wavelet en diferentes escalas de tiempo. El MOWDT también produce una serie de wavelets dependientes del tiempo y de coeficientes de escalas con vectores de base asociados a una ubicación t y una escala $\tau_j = [2^{j-1}, 2^j]$ para cada nivel de descomposición $j = 1, \dots, J_0$. Para el MODWT, las señales descompuestas se definen como sigue:

$$\tilde{D}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{\psi}_{j,l} f_{t-l}, \quad \tilde{S}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{\phi}_{j,l} f_{t-l}. \quad (2.33)$$

Por lo tanto, una serie de tiempo $y(t)$ se puede expresar en términos de esas señales como:

$$y(t) = \tilde{S}_j(t) + \tilde{D}_j(t) + \tilde{D}_{j-1}(t) + \dots + \tilde{D}_1(t). \quad (2.34)$$

El MODWT ayuda a eliminar ciertas deficiencias de la DWT convencional. En nuestras aplicaciones se pueden considerar como una mejora sobre la DWT.

Entre las características distintivas de la DWT convencional y el MODWT están las siguientes:

- Se puede manejar cualquier tamaño de muestral independientemente de si la serie es o no diádica.
- La resolución es aumentada en las escalas mayores.
- Las aproximaciones y detalles MODWT están asociados con la fase cero filtros, lo que hace posible alinear directamente sus características con los de la serie original.
- Una descomposición aditiva de la serie temporal en términos de sus detalles y aproximaciones es válida tanto para la DWT como para la MODWT. La diferencia es que para la DWT y sus aproximaciones no forman una energía (y covarianza) descomposición.
- La DWT convencional muchas veces decorrelaciona una amplia gama de procesos tanto estacionarios como no estacionarios (véase, Percival y Walden, 2000).

Como es típico de los estudios de co-movimiento y teniendo en cuenta las aplicaciones posteriores, nos centramos en el análisis de los métodos wavelets para la varianza, correlación y correlación cruzada. Elegimos la MODWT, ya que ofrece mejores estimadores para nuestros análisis⁵.

Consideremos dos series de tiempo y y x . Para un tamaño de 2^J , obtenemos $\{\tilde{h}_{j,l} : l = 0, \dots, L_j - 1\}$ como el filtro wavelet para la escala j^{th} , donde $L_j = (2^j - 1)(L - 1)$ es la longitud del filtro y L es el tamaño del filtro $\tilde{h} - l$. Por lo tanto podemos definir el proceso estocástico como:

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{j,t} \simeq \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} X_{t-l}, \quad (2.35)$$

para $X = y, x$, caracterizando la señal obtenida por la filtración de X para los coeficientes wavelet del MODWT. Si existe y es finita, la varianza wavelet dependiente del tiempo para la escala ν_j de la señal X está dada por:

$$\sigma_{X,t}^2(\nu_j) \simeq \text{var} \left\{ \widetilde{\mathcal{W}}_{j,t} \right\}. \quad (2.36)$$

Cuándo $\sigma_{X,t}^2(\nu_j) = \sigma_X^2(\nu_j)$ tenemos una varianza wavelet independiente del tiempo para la escala ν_j .

⁵Percival y Walden (2000) y Gençay et al. (2002) ofrecen una descripción detallada de la transformada wavelet discreta.

Del mismo modo, la covarianza wavelet para la escala ν_j está dada por:

$$\sigma_X(\nu_j) = \text{cov} \left\{ \widetilde{\mathcal{W}}_{x,j,t}, \widetilde{\mathcal{W}}_{y,j,t} \right\}. \quad (2.37)$$

Así se obtiene el coeficiente de correlación, como:

$$\rho_X(\nu_j) = \frac{\text{cov} \left\{ \widetilde{\mathcal{W}}_{x,j,t}, \widetilde{\mathcal{W}}_{y,j,t} \right\}}{\left(\text{var} \left\{ \widetilde{\mathcal{W}}_{x,j,t} \right\} \text{var} \left\{ \widetilde{\mathcal{W}}_{y,j,t} \right\} \right)^{1/2}} = \frac{\sigma_X(\nu_j)}{\sigma_x(\nu_j)\sigma_y(\nu_j)}. \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta el retardo τ en una de las series de tiempo, se obtiene la correlación cruzada wavelet como:

$$\rho_{X,\tau}(\nu_j) = \frac{\sigma_{X,\tau}(\nu_j)}{\sigma_x(\nu_j)\sigma_y(\nu_j)}. \quad (2.39)$$

En el caso que X_t sea Gaussiana, se puede estimar el intervalo de confianza $(1 - \alpha)$ para la correlación wavelet y la correlación cruzada wavelet empleando la transformación- z de Fisher. El intervalo de confianza para la escala ν_j está dada por:

$$\tanh \left\{ h[\tilde{\rho}_X(\nu_j)] \pm \zeta_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{\hat{N}_j - 3} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (2.40)$$

donde \hat{N}_j es el número de los coeficientes MODWT asociados con la escala ν_j y $\zeta_{\frac{\alpha}{2}}$ satisface $P[-\zeta_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq \zeta_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha$ cuando Z tiene una distribución normal estándar. Esta última estimación depende de la suposición de que no existen tendencias sistemáticas o características no estacionarias en los procesos wavelet $w_{1,j,t}$ y $w_{2,j,t}$.

En la aplicación empírica, se utilizó una función Daubechies de asimetría mínima y compacta de tamaño 8 para los parámetros ϕ y ψ . Para el nivel J de multi-resolución, utilizamos $J = 4$, ya que estudios empíricos anteriores han demostrado que un filtro moderado es adecuado para las características de los datos financieros (véase, Gençay et al., 2002). Este nivel de descomposición da lugar a cuatro niveles de detalle: el componente de mayor frecuencia D_1 que representa las variaciones a corto plazo debido a los shocks que ocurren en una escala de tiempo de $2^1 = 2$ días (efectos diarios), el componente D_2 que mide las variaciones en una escala de tiempo de $2^2 = 4$ días y que representa el efecto semanal y los componentes D_3 y D_4 , que representan las variaciones de mediano y largo plazo en una escala de tiempo de $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$ días,

respectivamente. Por último, S_4 es el residuo de la señal original, después de restar D_1, D_2, D_3 y D_4 .

Como en Gallegati (2010), consideramos que la existencia del contagio y la inter-dependencia como cambios en la correlación wavelet para escalas de alta y baja frecuencia entre dos períodos diferentes, respectivamente. Si se denota la estimación de los coeficientes de la correlación wavelet desde el inicio de la crisis financiera mundial y el período anterior como $\tilde{\rho}_{XY}^I(\sigma_j)$ y $\tilde{\rho}_{XY}^{II}(\sigma_j)$, respectivamente, se podría probar la hipótesis nula del no contagio y la no inter-dependencia definida por:

$$H_0 : \rho_{XY}^I(\nu_j) = \rho_{XY}^{II}(\nu_j), \quad (2.41)$$

que pueden ser rechazados con 95 % de confianza si los intervalos de confianza de los coeficientes de la correlación no se superponen (véase, Gençay et al., 2002).

De igual modo se puede contrastar la hipótesis sub-reacción, probando la hipótesis nula de que la correlación cruzada wavelet entre la rentabilidad de las acciones y del petróleo es igual a cero para diferentes escalas de tiempo:

$$H_0 : \rho_{X,\tau}(\nu_j) = 0. \quad (2.42)$$

Por consiguiente, si la hipótesis nula no es rechazada en escalas de tiempo diferentes, entonces no hay evidencia que apoye las hipótesis de sub-reacción o sobre reacción. Por el contrario, si la hipótesis nula es rechazada, entonces la evidencia de la hipótesis de sub-reacción es provista cuando la correlación cruzada entre las rentabilidades de las acciones y del petróleo retardado es negativa (positiva) a escalas de frecuencia alta (baja).

2.4. Evidencia basada en Wavelets del impacto del precio del petróleo sobre el rendimiento de las acciones

2.4.1. Introducción

El petróleo crudo es, sin duda, una materia prima influyente con extraordinarias ramificaciones para la economía real y los mercados financieros. A pesar de que el impacto negativo de los shocks del precio del petróleo en la macroeconomía está bien documentado (véase, e.g., Hamiltom, 1983, 2003; Hamiltom

y Herrera, 2004; Hooker, 2002; Kilian, 2008; Mork, 1994), hay menos consenso entre los economistas acerca de la respuesta de los mercados de valores a los movimientos del precio del petróleo. Mientras que algunas investigaciones empíricas acerca de la relación del mercado de petróleo con el de valores proporcionan evidencia de un impacto negativo de un shock del petróleo en el rendimiento de las acciones (Ciner, 2001; Kaul y Jones, 1996; Kilian y Park, 2009; Kling, 1985; Sadorsky, 1999, entre otros), otra corriente de la literatura corrobora que este vínculo puede ser positivo y significativo (ver, e.g., Arouri y Rault, 2011; El-Sharif et al., 2005; Narayan y Narayan, 2010), insignificante (véase, e.g., Apergis y Miller, 2009; Henriques y Sadorsky, 2008) o condicional y no lineal (véase, e.g., Park y Ratti, 2008; Reboredo, 2010).

Una de las limitaciones de la investigación empírica que estudia la relación entre el precio del petróleo y el mercado de valores es que se ha limitado a una o, como mucho, dos escalas de tiempo (a corto y a largo plazo). En teoría, la respuesta del mercado de valores a un shock del precio del petróleo es compleja ya que un aumento en los precios del petróleo afecta tanto a los flujos monetarios de la empresa (positiva o negativamente en función a su dependencia del petróleo) así como a los factores de descuentos del flujo de efectivo (dependiendo del efecto del precio del petróleo en la macroeconomía, en particular en la inflación, las tasas de intereses y la política monetaria). Este doble impacto en el valor de las acciones tiene potencialmente horizontes diferentes de tiempos, por lo que el efecto de un shock del precio del petróleo sobre la rentabilidad de las acciones puede ser observado en diferentes escalas de tiempo. Del mismo modo, los inversores en los mercados del petróleo y de las acciones son heterogéneos con respecto a sus horizontes de inversión, por lo que la transmisión de una crisis del petróleo a través de transacciones del mercado puede variar de acuerdo a la escala de tiempo.

En este artículo se estudia la interdependencia del mercado del petróleo y del mercado de valores en diferentes escalas de tiempo utilizando el análisis wavelet multi-resolución. Los wavelets son un enfoque de filtrado que permiten descomponer una serie de tiempo en componentes de diferente frecuencia, donde cada resolución es adaptada a su escala de tiempo. Las escalas de menor tiempo captan los componentes de las series de frecuencia de tiempos mayores que ocurren en períodos de tiempo muy cortos, mientras que las escalas de tiempos mayores capturan los componentes de frecuencia más bajas que ocurren durante períodos de tiempo muy largos. La serie original se transforma a través de funciones especiales (base) llamadas wavelets, que son derivadas a partir de series de aproximaciones sucesivas (similar a las series de Fourier),

y están representadas por el seno y el coseno. Las funciones de wavelet tienen la propiedad de concentrar la energía en el tiempo para realizar un análisis de la temporalidad, los cambios no estacionarios y de volatilidad en el tiempo (Burrus et al., 1998; Rua y Nunes, 2009). En la literatura económica y financiera, varios estudios emplean el enfoque wavelet para estudiar las propiedades dinámicas de diferentes fenómenos financieros y económicos, tales como las relaciones entre la oferta monetaria y la renta (Ramsey y Lampart, 1998a), los gastos y los ingresos (Ramsey y Lampart, 1998b) la rentabilidad de las acciones y la inflación (Kim y In, 2005), los ciclos económicos (Gallegati, 2010; Yogo, 2008) y la fijación de precios de activos de capital en diferentes escalas de tiempo (Fernandez, 2005; Gençay et al., 2005). Los wavelets también han sido utilizados para modelar los ciclos de precios del petróleo (Naccache, 2011), para predecir los precios del crudo (Jammazi y Aloui, 2011; Yousefi et al., 2005), y para descomponer los precios del petróleo Brent y West Texas Intermediate con la finalidad de analizar el efecto de los componentes individuales en el índice del mercado de valores (Jammazi y Aloui, 2010). Sin embargo, ningún trabajo ha utilizado aún los wavelets para analizar la relación entre los mercados del petróleo y los mercados de valores en diferentes escalas de tiempo, considerando tanto el mercado de valores agregado como datos a nivel sectorial.

Una característica interesante del análisis wavelet es que la descomposición multi-resolución de la transformada wavelet puede ser utilizado para identificar el contagio y la interdependencia entre los los mercados de valores y del petróleo (véase, Gallegati, 2010). Dado que la transmisión del shock debido al contagio es rápida y se desvanece rápidamente, en cuestión de días, los cambios en las correlaciones wavelet entre las rentabilidades del petróleo y de las acciones en frecuencias más altas están asociadas con el contagio, mientras que los cambios en frecuencias más bajas se asocian con la interdependencia o comovimiento. Dado que la posible aparición del contagio del mercado financiero y los cambios en la interdependencia entre los mercados del petróleo y de valores durante la crisis financiera mundial reciente aún no ha sido contrastado, ya sea a nivel del mercado agregado o en el ámbito sectorial, en este capítulo se contrasta esa hipótesis usando la prueba empleada en Gallegati (2010), consistente en analizar si los intervalos de confianza, de los coeficientes de la correlación wavelet en diferentes escalas de tiempo para los períodos anterior y posterior al inicio de la crisis financiera están o no solapados.

También se ha contrastado si existe un efecto rezagado del precio del petróleo sobre las rentabilidades de las acciones en diferentes escalas de tiempo

utilizando las correlaciones cruzadas wavelet. Los modelos teóricos proponen que los inversores del mercado de valores tienden a no reaccionar a la nueva información pública a corto plazo y tienden a reaccionar de forma abrupta a más largo plazo (Barberis et al., 1998; Daniel et al., 1998; Hong y Stein, 1999; Poteshtman, 2001). Así, mediante el estudio de las correlaciones cruzadas wavelet en los mercados del petróleo y de valores a diferentes escalas de tiempo se puede evaluar la hipótesis de no reacción.

El análisis empírico se centró en la relación entre el mercado del petróleo y el mercado de valores Europeos y de Estados Unidos, tanto a nivel agregado como a nivel sectorial considerando el período de junio 2000 a julio 2011. Nuestros resultados, basados en el uso de la transformación wavelet, aportan tres hechos estilizados. En primer lugar, los shocks del precio del petróleo (incrementos del precio) no tuvieron ningún impacto en el rendimiento del mercado de valores agregados en el período anterior a la crisis financiera, aunque a nivel sectorial, el valor de las compañías de petróleo y de gas resultó positivamente afectado. Este efecto fue común a los dos mercados de valores analizados. En segundo lugar, hay evidencia de contagio y de inter-dependencia (positiva) entre el petróleo y ambos mercados de valores en el período posterior al inicio de la crisis financiera global. Esta evidencia se sostiene tanto a nivel agregado como sectorial, con la excepción de las compañías de petróleo y gas en los Estados Unidos y el sector del automóvil en Europa, donde no hubo ni contagio ni cambios en el co-movimiento y las compañías de petróleo y de gas en Europa, donde si hubo contagio sin cambios en la inter-dependencia. El hecho de que los mercados del petróleo y de valores se volvieran más dependiente con el inicio de la crisis financiera implica que los beneficios de la diversificación de los inversores que operan en esos mercados se han reducidos considerablemente. En tercer lugar, el análisis wavelet de correlación cruzada indica que el mercado de valores no ha sobre-reaccionado ante shocks en el mercado del petróleo durante el periodo anterior a la crisis financiera. Esta evidencia es extendible a todos los índices sectoriales analizados. Sin embargo, con el inicio de la crisis financiera, los precios del petróleo se movieron en conjunto, este efecto fue capturado por las frecuencias más altas, posiblemente como resultado del efecto contagio. La situación es bastante diferente para las frecuencias más bajas, donde las correlaciones tuvieron valores significativos tanto positivos como negativos. Este efecto puede ser producto de la forma compleja en que los precios del petróleo y de las acciones se afectan. La evidencia es bastante similar para los sectores, con la excepción de las industrias del petróleo y del gas.

2.4.2. Revisión bibliográfica

La literatura empírica existente sobre los efectos del precio del petróleo y sobre el mercado de valores ofrece resultados mixtos sobre el impacto de los efectos de los movimientos del precio del petróleo en los precios de las acciones. Básicamente, esta literatura puede ser clasificada en función de si los precios del petróleo tienen un impacto positivo, negativo o nulo en la rentabilidad de las acciones y según el impacto de la volatilidad de los precios del petróleo sobre la volatilidad de las rentabilidades de las acciones.

El impacto negativo de los movimientos del precio del petróleo en las rentabilidades del mercado de valores fue documentado inicialmente por [Kaul y Jones \(1996\)](#) para las rentabilidades reales agregadas de Estados Unidos, Canadá, Japón y el Reino Unido. Posteriormente [Sadorsky \(1999\)](#) demostró que las rentabilidades reales de las acciones en los Estados Unidos se vieron afectadas negativamente por los movimientos del precio del petróleo y que los precios del petróleo explicaban una gran proporción de la varianza del error previsto en las rentabilidades reales de las acciones. Asimismo, la transmisión de los movimientos del precio del petróleo a la rentabilidad de las acciones en Estados Unidos fue asimétrico. [Hammoudeh y Li \(2005\)](#) también aportan evidencia de una relación negativa entre los precios del petróleo y la rentabilidad de las acciones para los países exportadores de petróleo y las industrias más sensibles al precio del petróleo en Estados Unidos. Del mismo modo, [Ghouri \(2006\)](#) reportó una relación negativa entre el West Texas Intermediate Cushing y las posiciones mensuales de las acciones en Estados Unidos. Para las economías emergentes, [Basher y Sadorsky \(2006\)](#) y [Hammoudeh y Choi \(2007\)](#) proporcionaron pruebas del impacto negativo de los precios del petróleo en los mercados de acciones. Mediante el estudio de la relación entre los precios del petróleo y 35 sectores industriales, [Nandha y Haff \(2008\)](#) mostraron que un aumento en los precios del petróleo tuvo un impacto negativo en todas las industrias excepto en los sectores petrolero y de gas. Utilizando datos mensuales para 48 países desarrollados y en vías de desarrollo, [Driesprong et al. \(2008\)](#) encontró una relación negativa y estadísticamente significativa entre los precios del petróleo y la rentabilidad de las acciones. Además también aportan evidencia de previsibilidad, la cual es consistente con la hipótesis de que los inversores no reaccionan de modo instantáneo a la información de los precios del petróleo. [Kilian y Park \(2009\)](#) demostraron que los cambios en el precio del petróleo impulsados por los shocks de demanda en el mercado del petróleo dieron lugar a la disminución de la rentabilidad real de las acciones de los Estados Unidos, mientras que los shocks de la oferta del petróleo no presentaron efectos

significativos en la rentabilidad. Del mismo modo, la demanda de petróleo y la crisis de suministro de petróleo conjuntamente representaron alrededor del 22% de las variaciones a largo plazo en la rentabilidad real de las acciones. Examinando los precios del petróleo y la rentabilidad de las acciones para las compañías cotizadas en el NYSE, [Narayan y Sharma \(2011\)](#) encontraron que el precio del petróleo afectó la rentabilidad de las empresas según su sector, existiendo efectos retardados sobre la rentabilidad de las empresas de acuerdo con la hipótesis de la no reacción de los inversores, y que la intensidad del impacto sobre la rentabilidad de las empresas variaba en relación al tamaño de la misma. A nivel sectorial, [Elyasiani et al. \(2011\)](#) aporta evidencia empírica de que los cambios en los precios del petróleo constituyen un factor de riesgo en los precios de los activos, dado que el precio de mercado de futuros del petróleo y la volatilidad afectan de forma negativa y positiva la rentabilidad de la industria negativa, respectivamente.

Al emplear el modelo de corrección de error vectorial para analizar la relación a largo plazo entre el precio mundial del petróleo crudo y de los mercados de valores internacionales, [Miller y Ratti \(2009\)](#) aportaron evidencia de un impacto negativo del petróleo en los mercados de valores a largo plazo, efecto que cambia temporalmente. De forma similar, pero utilizando un modelo de corrección de error vectorial con umbrales, [Zhu et al. \(2011\)](#) demostró la existencia de la causalidad de Granger bi-direccional de largo plazo entre los mercados del petróleo crudo y los mercados de valores de la OCDE y de los países no miembros de la OCDE utilizando datos mensuales.

Desde una perspectiva no lineal, [Ciner \(2001\)](#) utilizó una prueba de causalidad no lineal para demostrar que los shocks del precio del petróleo afectan al índice de acciones en una manera no lineal y que el índice de valores, a su vez, afecta al mercado de futuros del petróleo, lo que sugiere una causalidad bi-direccional. Del mismo modo, [Aloui y Jammazi \(2009\)](#), [Chen \(2010\)](#) y [Reboredo \(2010\)](#) emplearon los modelos del cambio de régimen (*regime-switching models*) para examinar la no linealidad en la relación entre los precios del petróleo y los mercados de valores, encontrando que el petróleo tuvo un impacto negativo en la media y la volatilidad de las rentabilidades de las acciones en ciertos regímenes. Además, [Jammazi y Aloui \(2010\)](#) utilizaron un enfoque markoviano vectorial auto-regresivo (*Markov-switching vector*) para examinar la relación entre componentes de los precios del petróleo (que se obtiene mediante la descomposición wavelet) y la rentabilidad del mercado de valores agregado, encontrando que los shocks del crudo moderaron temporalmente las fases de expansión del mercado de valores.

Otros estudios han documentado un vínculo positivo entre los precios del petróleo y la rentabilidad del mercado de valores. Por ejemplo, [Sadorsky \(2001\)](#) demostró que los beneficios de las compañías de petróleo y gas canadienses se relacionaban positivamente con el aumento de los precios del petróleo. [El-Sharif et al. \(2005\)](#) investigaron la relación entre el petróleo y los valores de equidad de las compañías de petróleo y de gas del Reino Unido, encontrando evidencia de una relación positiva. Del mismo modo, [Faff y Brailsford \(1999\)](#) reportaron una sensibilidad positiva de los valores relacionados con el petróleo y el gas a los cambios del precio del petróleo para Australia. [Narayan y Narayan \(2010\)](#) encontraron que los precios del petróleo tuvieron un efecto positivo y estadísticamente significativo sobre los precios de las acciones en Vietnam. [Arouri y Rault \(2011\)](#), utilizando co-integración para datos de panel y los métodos de regresión aparentemente no relacionados, informaron de un impacto positivo del aumento del precio del petróleo sobre el precio de las acciones de los países miembros del Consejo de Cooperación del Golfo.

Evidencia sobre la independencia del petróleo y la rentabilidad del mercado de valores fue proporcionada por [Chen et al. \(1986\)](#) quien, al estudiar si el riesgo de variaciones en el precio del petróleo era valorado en los mercados de valores, encontró que el precio del petróleo tenía un impacto no significativo en la rentabilidad de los activos. Del mismo modo, utilizando la metodología de vectores auto-regresivo, [Huang et al. \(1996\)](#) estudiaron la relación entre las rentabilidades diarias de las acciones diarias de Estados Unidos y la rentabilidad futura del petróleo, encontrando causalidad significativa sólo para la rentabilidad futura del petróleo y para la rentabilidad de la industria petrolera, pero un impacto no significativo en otros índices de la industria o en el índice agregado. [Henriques y Sadorsky \(2008\)](#) analizaron la relación entre los precios de las energías alternativas y las acciones, los precios de las acciones de tecnología, los precios del petróleo y las tasas de cambio, demostrando que los shocks de los precios del petróleo tuvieron un impacto débil sobre el precio de las acciones de las empresas de energía alternativa. [Apergis y Miller \(2009\)](#) estudiaron los efectos de los shocks estructurales en la rentabilidad del mercado de valores para una muestra de ocho países, encontrando que la rentabilidad del mercado de valores no respondió de forma significativa a la crisis del mercado de petróleo. [Janabi et al. \(2010\)](#) encontraron evidencia de la ausencia de causalidad de Granger para los precios del petróleo en el índice del precio de las acciones de los países miembros del Consejo de Cooperación del Golfo. También se encontró que el efecto de los precios del petróleo en el rendimiento de las acciones era dependiente de si un país era un importador o exportador

de petróleo (Park y Ratti, 2008) y en condiciones específicas del mercado de valores (Cong et al., 2008).

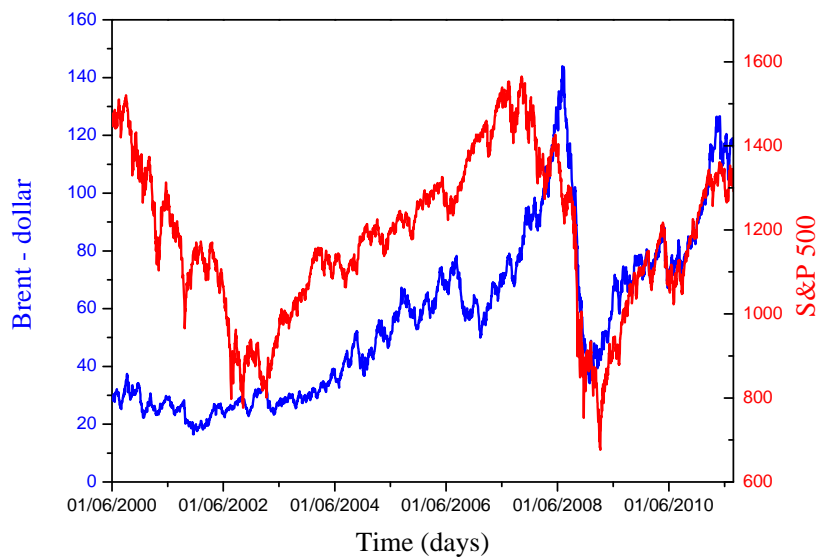
La relación entre la volatilidad del mercado de valores y la del petróleo fue examinada por Hammoudeh et al. (2004), quienes emplearon modelos de heterocedasticidad condicional auto-regresiva univariante (GARCH) y multi-variante para demostrar que la volatilidad del petróleo tiene efectos de amortiguación en la volatilidad de las acciones para ciertos sectores del petróleo, como el refinado del petróleo y del gas, mientras que incrementa la volatilidad para las empresas dedicadas a la producción del petróleo y la exploración. Aloï et al. (1998), también empleando un enfoque uni-variante y multi-variante, encontraron que los cambios del precio del petróleo tenían efectos causales sobre la volatilidad del mercado de acciones en seis países desarrollados. Hammoudeh et al. (2010) utilizaron tanto el modelo GARCH estándar como los modelos GARCH asimétricos para estudiar los efectos de los cambios de precio del petróleo en la volatilidad del mercado de valores, encontrando un efecto positivo para los aumentos en la volatilidad de valores para los sectores que utilizan el petróleo intensamente, un efecto negativo para los sectores relacionados al petróleo y un efecto negativo y asimétrico para los restantes sectores. Vo (2011) estudió la volatilidad de los mercados futuros de acciones y el petróleo utilizando un modelo de volatilidad estocástico multivariante con correlación variable en el tiempo, encontrando persistencia en la volatilidad y un efecto positivo para la innovación de la volatilidad en un mercado sobre otro mercado. Arouri et al. (2011) estudiaron la transmisión de la volatilidad entre los mercados del petróleo y de valores en Europa y en los Estados Unidos a nivel sectorial utilizando un modelo GARCH auto-regresivo multivariante, dando a conocer efectos de desbordamiento o *spillover* significativos de la volatilidad entre el petróleo y la rentabilidad de acciones sectoriales.

2.4.3. Datos

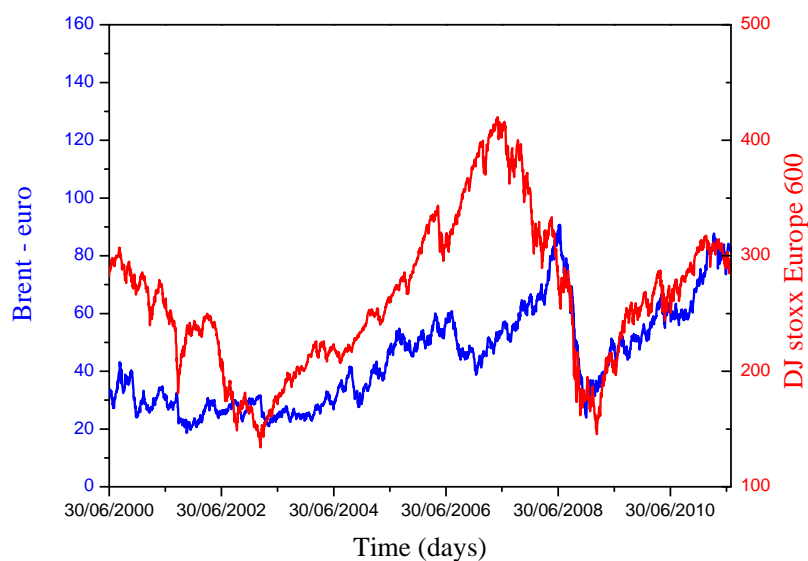
Los datos utilizados son diarios para el período desde el 1 junio del año 2000 hasta el 29 julio del año 2011. Para los precios del petróleo se empleó el petróleo Brent ya que es una referencia para la determinación del precio de otros crudos livianos en Europa y está estrechamente relacionado con otros marcadores del precio del crudo como el West Texas Intermediate, Maya, Dubai, etc (ver Reboredo, 2011). Los precios del crudo Brent, cotizado en dólares y convertido a euros, utilizando la tasa de cambio euro-dólar, se obtuvieron del sitio web de la Agencia de Información de Energía de EEUU (<http://www.eia.doe.gov>). Los datos sobre los precios de las acciones están dados por el índice agregado

S&P 500 y por el Dow Jones Stoxx Europe 600. Para el nivel sectorial fueron considerados los precios para los sectores: Automóviles y repuestos, bancos, química, petróleo y gas, bienes industriales, servicios, telecomunicaciones y tecnología para Estados Unidos y Europa, respectivamente. Estos datos se obtuvieron de la base de datos Datastream Internacional.

Figura 2.3: Evolución Temporal del precio del petróleo Brent y los índices agregados.



Panel A: Brent (línea azul) y el índice S&P 500 (línea roja)



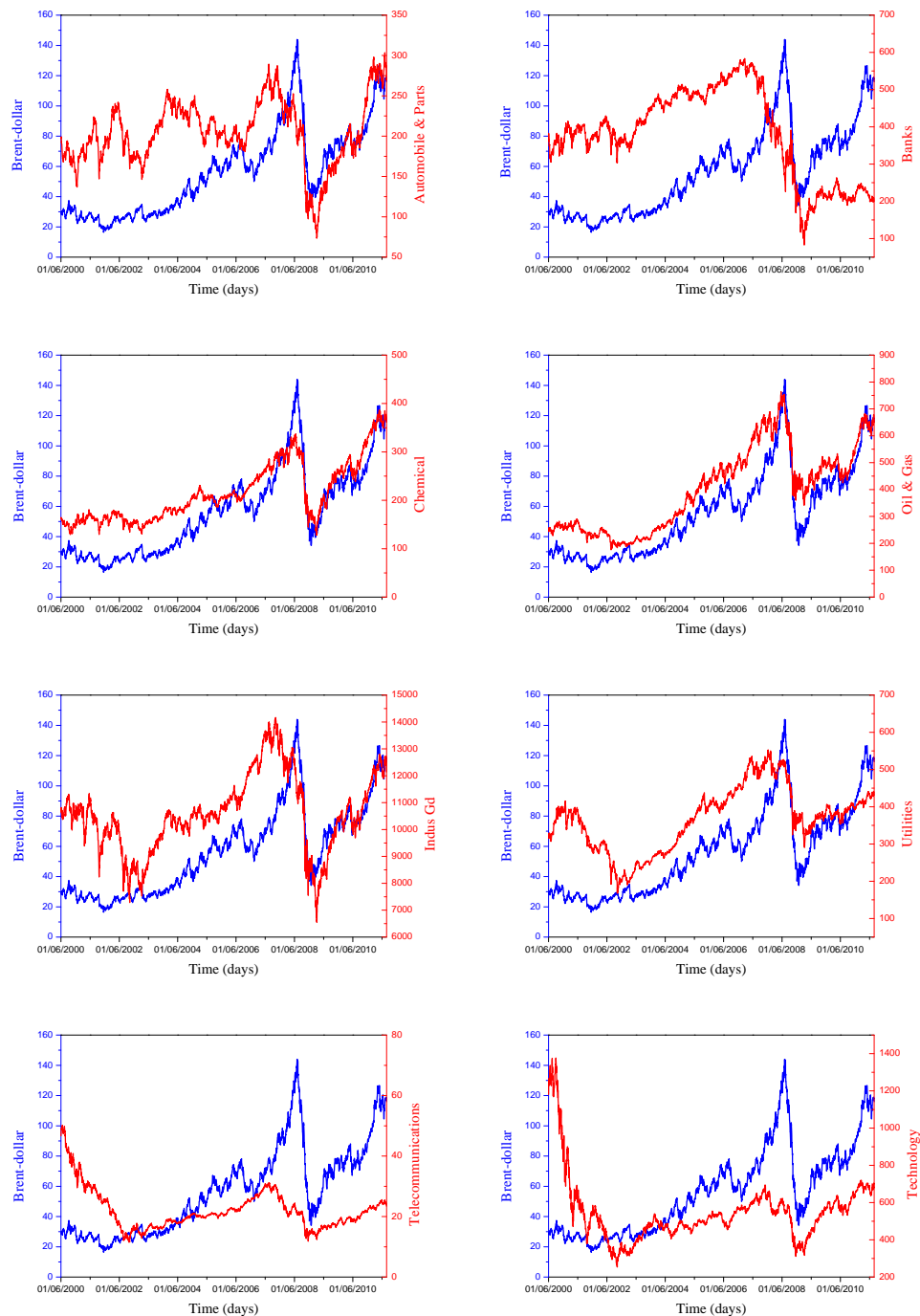
Panel B: Brent (línea azul) y el índice Dow Jones Stoxx Europe 600 (línea roja)

La dinámica del precio del petróleo Brent, los índices S&P 500 y Dow Jones Stoxx Europe 600 y los índices sectoriales se muestran en las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5. Podemos observar que hasta julio de 2008, los precios del petróleo y los índices no se mueven en la misma dirección mientras que después de julio de 2008 se produjo un movimiento conjunto. Los índices sectoriales para los Estados Unidos y Europa muestran un patrón similar, con excepción de las telecomunicaciones y las tecnologías en ambos mercados. El precio del petróleo fluctuó alrededor de los 40 dólares hasta el año 2004, después del cual aumentó gradualmente (con algunas excepciones, como el último trimestre de 2006), alcanzando un pico de 145 dólares en julio de 2008. El agregado de S&P 500 y los índices de Dow Jones Stoxx Europe 600 inicialmente experimentaron una gran caída en el último trimestre de 2002, una fuerte recuperación hasta el año 2007. Luego comenzaron a caer hasta el primer trimestre de 2009 y han estado creciendo desde entonces.

El cambio en el co-movimiento observado entre el índice del agregado y el índice sectorial, después de que los precios del petróleo alcanzaran su punto máximo en julio de 2008, ofrece cierta evidencia de un cambio estructural en la inter-dependencia del precio del petróleo y de valores. De hecho, para una ventana de datos de 300 observaciones diarias, la correlación Pearson para la rentabilidad del petróleo y las acciones aporta algunas pruebas aproximadas de un cambio en la relación petróleo-acciones con el inicio de la crisis financiera mundial. Se utilizó el estadístico F para la hipótesis nula de no cambio en la relación de dependencia lineal, desarrollado por Andrews (1993), Andrews y Ploberger (1994) y Hansen (1997), y se identificó de forma endógena un punto de cambio estructural en la dependencia lineal entre julio de 2008 y septiembre de 2008 para todas las series de rentabilidad. Por lo tanto, se decidió dividir la muestra en dos períodos, es decir, antes de julio 2008 y después de julio de 2008, con el fin de poner a prueba el contagio de la crisis financiera y la inter-dependencia en la relación de la rentabilidad del petróleo y de los valores. Para cada período, el precio del petróleo y las rentabilidades fueron calculados como la diferencia entre el logaritmo del precio actual y el logaritmo del precio del día anterior.

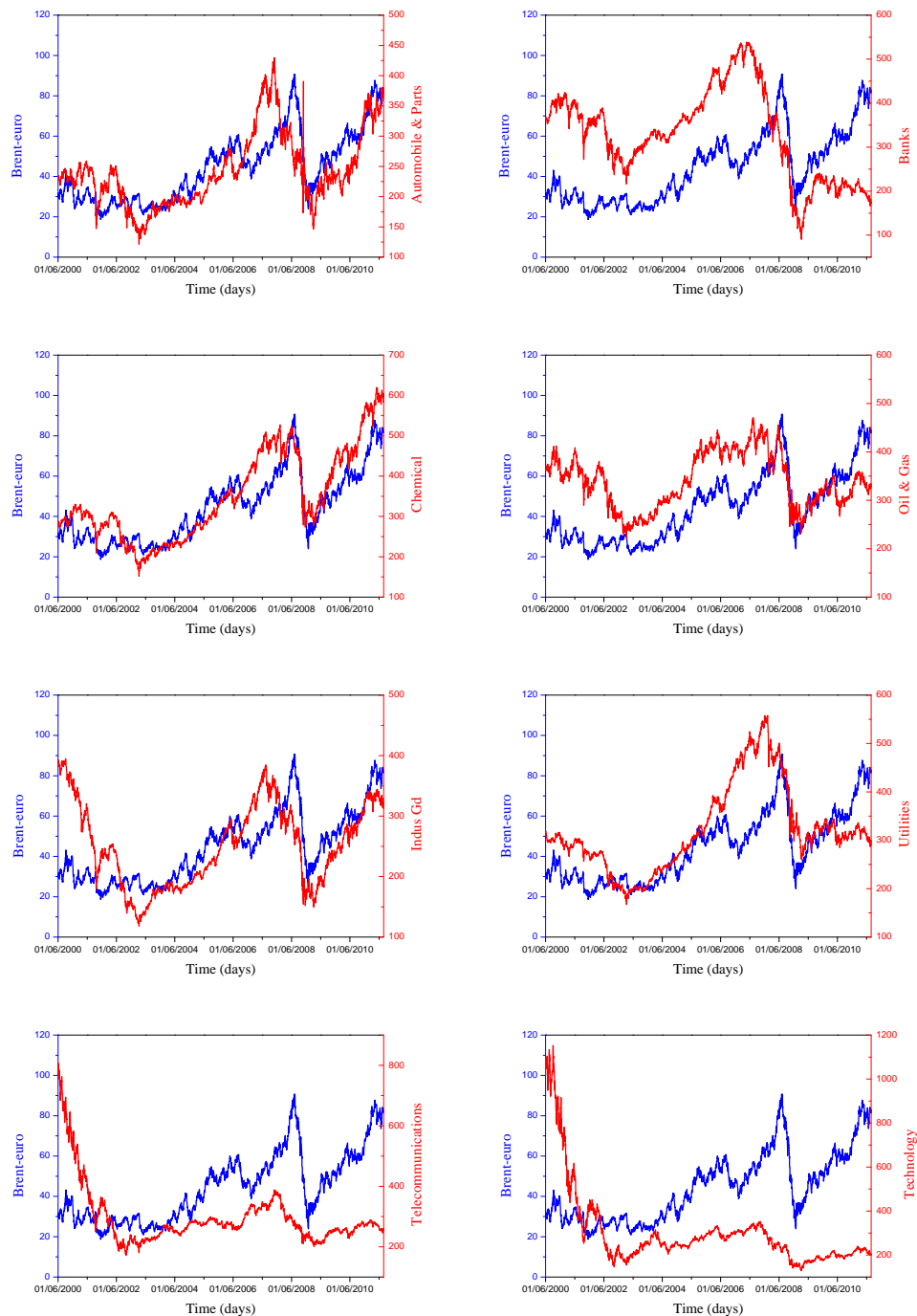
Las estadísticas descriptivas de los precios del petróleo y de la rentabilidad agregada y sectorial para las muestras del periodo anterior a julio de 2008 y posterior a julio de 2008 se resumieron en los cuadros 2.1 y 2.2. La rentabilidad del precio del petróleo y los índices agregados y sectoriales fueron cercanos a cero en ambos mercados y en ambos períodos. Las desviaciones estándares fueron más altas en el período posterior a 2008 en todos los casos, lo que indica

Figura 2.4: Evolución temporal del precio del petróleo Brent (línea azul) y los índices sectoriales del S&P 500 (línea roja).



un aumento de la volatilidad y un riesgo relativamente alto. En general, estas rentabilidades presentaron asimetría negativa en ambos períodos. Todas las rentabilidades mostraron un exceso de curtosis que aumentó en el período de crisis. De hecho, la normalidad de la distribución incondicional fue rechazada para todas las series en ambos períodos. La estadística de Ljung-Box sugiere

Figura 2.5: Evolución temporal del precio del petróleo Brent (línea azul) y los índices sectoriales del Dow Jones Stoxx Europe 600 (línea roja).



la inexistencia de la correlación serial en la mayoría de las rentabilidades en ambos períodos, y también hay evidencia de efectos de heteroscedasticidad condicional auto-regresiva (ARCH) en todas las series en ambos períodos. La correlación incondicional indica que, en la muestra del periodo previo a julio de 2008, había una débil correlación negativa entre los índices de petróleo y

Cuadro 2.1: Estadística descriptiva para las rentabilidades del petróleo Brent y de los índices agregados.

| Panel A: Pre-Julio 2008 | Media (%) | Desv. Std. (%) | Asim. | Kurt. | JB ¹ | LB ¹ | ARCH ¹ | Corr.con Oil | Corr.con S&P500 |
|----------------------------|--------------|-------------------|--------|-------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|--------------------|
| E.U.A | | | | | | | | | |
| Brent | 0.07 | 2.34 | -0.465 | 7.36 | 0.00 | 0.12 | 0.00 | – | -0.05 |
| S&P500 | -0.00 | 1.11 | 0.083 | 5.13 | 0.00 | 0.15 | 0.01 | -0.05 | – |
| Europa | | | | | | | | | |
| Brent | 0.04 | 2.34 | -0.391 | 7.04 | 0.00 | 0.18 | 0.01 | – | 0.03 |
| DJ Stoxx 600 | -0.00 | 1.05 | -0.265 | 5.86 | 0.00 | 0.21 | 0.00 | 0.03 | – |
| Panel B: Pós-Julio 2008 | Media (%) | Desv. Std. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | LB ¹ | ARCH ¹ | Corr.con Oil | Corr.con S&P500 |
| E.U.A | | | | | | | | | |
| Brent | -0.02 | 2.79 | -0.038 | 8.43 | 0.00 | 0.21 | 0.00 | – | 0.28 |
| S&P500 | 0.00 | 1.85 | -0.211 | 9.55 | 0.00 | 0.19 | 0.00 | 0.28 | – |
| Europa | | | | | | | | | |
| Brent | -0.01 | 2.72 | 0.152 | 11.32 | 0.00 | 0.18 | 0.00 | – | 0.41 |
| DJ Stoxx 600 | -0.00 | 1.75 | -0.124 | 7.10 | 0.00 | 0.22 | 0.00 | 0.41 | – |

¹p-values < 0.05 indican el rechazo de la hipótesis nula para los tests estadísticos asociados al nivel de 5 %.

Nota: Datos diarios para el período del 1 de Junio del año 2000 al 29 de Julio del año 2011. Los datos fueron divididos en dos muestras: (a) Panel A: 1 Junio 2000 al 30 de Junio 2008 (antes de la crisis financiera) y (b) Panel B: 01 Julio 2008 al 29 Julio 2011 (después del inicio de la crisis financiera). La tabla muestra las estadísticas básicas para las series de rentabilidades, incluyendo media, desviación standard (Desv. Std.), asimetría (Asim.), y curtosis (Curt.). ARCH se refiere al teste estadístico para la heterosedasticidad condicional de orden 10. LB se refiere al estadístico Ljung Box para autocorrelación de orden 10. JB se refiere al estadístico Jarque-Bera para detectar normalidad. Corr. se refiere al coeficiente de correlación.

de valores (a excepción de acciones de petróleo y gas, que se correlacionaron positivamente con los precios del petróleo). Esta correlación se incremento significativamente en la muestra del periodo posterior a julio de 2008.

Cuadro 2.2: Estadística descriptiva de las rentabilidades de los índices sectoriales.

| Panel A: Período de Enero de 2000 a Julio de 2008 | | | | | | | | | |
|---|-----------|----------------|--------|-------|-----------------|-----------------|-------------------|--------------------|------------------|
| E.U.A | Media (%) | Desv.std. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | LB ¹ | ARCH ¹ | Corr.con Petróleo | Corr.con S&P500 |
| Automóviles & Rep. | 0.00 | 1.52 | -0.202 | 6.90 | 0.00 | 0.21 | 0.00 | -0.04 | 0.68 |
| Bancos | -0.01 | 1.45 | 0.217 | 6.93 | 0.00 | 0.20 | 0.01 | -0.09 | 0.77 |
| Químico | 0.03 | 1.45 | 0.058 | 6.20 | 0.00 | 0.25 | 0.00 | -0.04 | 0.70 |
| Petróleo & Gas | 0.05 | 1.51 | -0.279 | 4.14 | 0.00 | 0.19 | 0.00 | 0.28 | 0.52 |
| Bienes Industriales | 0.00 | 1.07 | -0.040 | 6.44 | 0.00 | 0.27 | 0.00 | -0.07 | 0.95 |
| Utilities | 0.02 | 1.28 | -0.541 | 9.41 | 0.00 | 0.32 | 0.01 | 0.06 | 0.50 |
| Telecomunicaciones | -0.03 | 1.55 | -0.201 | 6.68 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | -0.05 | 0.71 |
| Tecnología | -0.03 | 2.10 | 0.433 | 8.30 | 0.00 | 0.27 | 0.01 | -0.03 | 0.80 |
| Europa | | | | | | | | | |
| Automóviles & Rep. | 0.00 | 1.62 | -0.120 | 5.62 | 0.00 | 0.23 | 0.01 | 0.00 | 0.80 |
| Bancos | -0.01 | 1.37 | -0.026 | 6.98 | 0.00 | 0.25 | 0.00 | -0.01 | 0.91 |
| Químico | 0.02 | 1.26 | 0.031 | 7.46 | 0.00 | 0.27 | 0.00 | -0.00 | 0.80 |
| Petróleo & Gas | 0.00 | 1.41 | -0.397 | 5.38 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | 0.26 | 0.64 |
| Bienes Industriales | -0.01 | 1.22 | -0.223 | 5.30 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.04 | 0.95 |
| Utilities | 0.01 | 1.03 | -0.578 | 9.97 | 0.00 | 0.31 | 0.01 | -0.00 | 0.72 |
| Telecomunicaciones | -0.05 | 1.67 | 0.143 | 5.20 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | 0.00 | 0.74 |
| Tecnología | -0.07 | 2.31 | 0.110 | 5.45 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.01 | 0.78 |
| Panel B: Período de Julio de 2008 a Julio 2011 | | | | | | | | | |
| E.U.A | Media (%) | Desv. std. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | LB ¹ | ARCH ¹ | Corr. con Petróleo | Corr. con S&P500 |
| Automóviles & Rep. | 0.04 | 2.48 | -0.011 | 5.56 | 0.00 | 0.22 | 0.00 | 0.27 | 0.82 |
| Bancos | -0.03 | 4.05 | 0.111 | 9.29 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.14 | 0.80 |
| Químico | 0.02 | 2.27 | -0.446 | 7.12 | 0.00 | 0.31 | 0.00 | 0.31 | 0.92 |
| Petróleo & Gas | -0.01 | 2.55 | -0.312 | 11.91 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.40 | 0.88 |
| Bienes Industriales | 0.00 | 1.68 | 0.051 | 10.00 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | 0.27 | 0.98 |
| Utilities | -0.02 | 1.63 | 0.707 | 14.81 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.24 | 0.82 |
| Telecomunicaciones | 0.01 | 1.96 | 0.029 | 10.03 | 0.00 | 0.31 | 0.00 | 0.24 | 0.90 |
| Tecnología | 0.02 | 1.88 | 0.012 | 8.18 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.26 | 0.93 |
| Europa | | | | | | | | | |
| Automóviles & Rep. | 0.04 | 3.39 | 2.893 | 7.22 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | 0.15 | 0.39 |
| Bancos | -0.06 | 2.71 | 0.113 | 9.01 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.34 | 0.89 |
| Químico | 0.02 | 1.84 | -0.016 | 8.02 | 0.00 | 0.24 | 0.00 | 0.40 | 0.86 |
| Petróleo & Gas | -0.03 | 2.05 | 0.098 | 9.52 | 0.00 | 0.27 | 0.00 | 0.51 | 0.83 |
| Bienes Industriales | 0.01 | 1.93 | -0.035 | 7.42 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.39 | 0.96 |
| Utilities | -0.05 | 1.68 | 0.518 | 15.83 | 0.00 | 0.31 | 0.00 | 0.35 | 0.79 |
| Telecomunicaciones | -0.00 | 1.53 | 0.168 | 10.29 | 0.00 | 0.33 | 0.00 | 0.30 | 0.76 |
| Tecnología | -0.01 | 1.85 | -0.200 | 6.87 | 0.00 | 0.29 | 0.00 | 0.35 | 0.85 |

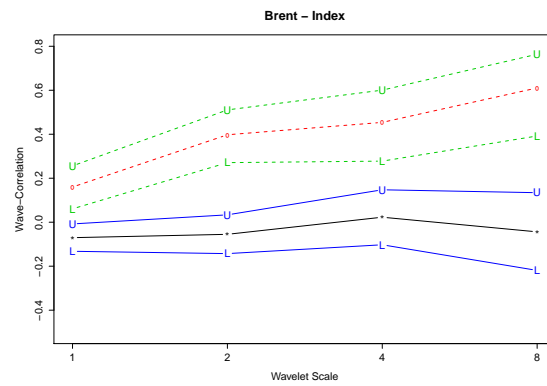
¹p-values < 0.05 indican el rechazo de la hipótesis nula para los tests estadísticos asociados al nivel de 5%.

Nota: Datos diarios para el período del 1 de Junio del año 2000 al 29 de Julio del año 2011. Los datos fueron divididos en dos muestras: (a) Panel A: 1 Junio 2000 al 30 de Junio 2008 (antes de la crisis financiera) y (b) Panel B: 01 Julio 2008 al 29 Julio 2011 (después del inicio de la crisis financiera). La tabla muestra las estadísticas básicas para las series de rentabilidades, incluyendo media, desviación standard (Desv. Std.), asimetría (Asim.), y curtosis (Curt.). ARCH se refiere al teste estadístico para la heterosedasticidad condicional de orden 10. LB se refiere al estadístico Ljung Box para autocorrelación de orden 10. JB se refiere al estadístico Jarque-Bera para detectar normalidad. Corr. se refiere al coeficiente de correlación.

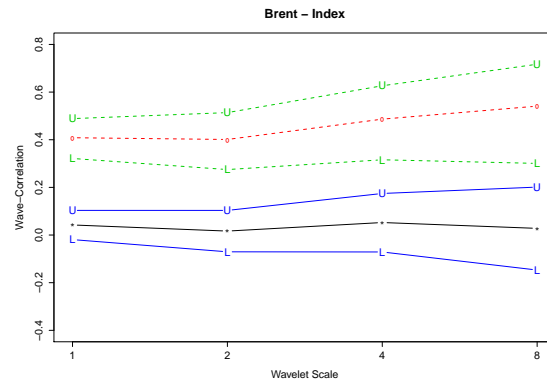
2.4.4. Resultados

Utilizando los coeficientes wavelet para los niveles 1 a 4, se estimó la correlación wavelet $\tilde{\rho}_{XY}(\lambda_j)$ para cada par de variables compuestas para la muestra de los dos períodos analizados. Los resultados de la correlación de la rentabilidad de los mercados del petróleo y de las acciones para diferentes niveles de resolución se muestran en las figuras 2.6, 2.7 y 2.8. Las líneas continuas y discontinuas corresponden al coeficiente de correlación wavelet para el periodo anterior a julio de 2008 y posterior a julio de 2008, respectivamente. U y L representan los límites superior e inferior de un intervalo de confianza del 95 %.

Figura 2.6: Correlación wavelet entre el petróleo Brent y los índices agregados.



Panel A: Brent y S&P 500



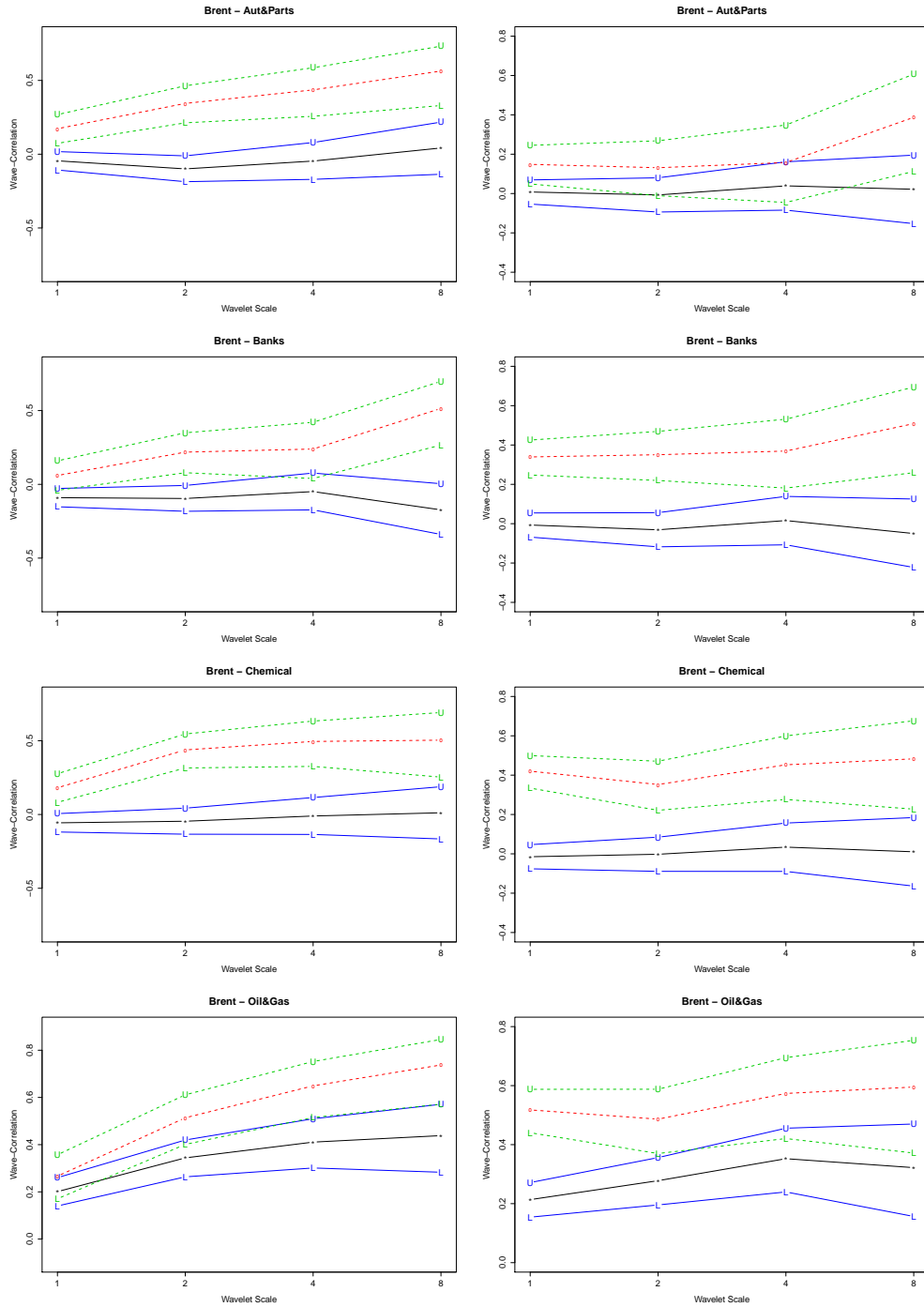
Panel B: Brent y Dow Jones Stoxx Europe 600

La evidencia de correlación wavelet muestra dos patrones diferentes de dependencia de las rentabilidades del petróleo y de los valores en los dos períodos estudiados: (a) no hubo dependencia entre los mercados del petróleo y de los valores ya sea a nivel agregado o sectorial, con la excepción de las acciones de petróleo y gas en el periodo anterior a julio de 2008, con correlaciones en todas las escalas de tiempo cercanas a cero y no significativas, y (b) hubo dependencia positiva en todas las escalas de tiempo en el periodo posterior a julio de

2008, tanto en el nivel agregado como sectorial. El aumento significativo en la correlación wavelet en el período posterior a julio de 2008 permitió el rechazo de la hipótesis nula de no contagio en la ecuación (3.29) para la rentabilidad agregada en diferentes escalas de tiempo, por lo que con el inicio de la crisis financiera existe contagio financiero e inter-dependencia entre los precios del petróleo Brent y los índices de la rentabilidad de las acciones para los Estados Unidos y Europa, con la excepción de los siguientes: las acciones de petróleo y de gas en los Estados Unidos y los valores de automóviles en Europa, donde no hubo ni contagio ni cambios en el co-movimiento, y los valores del petróleo y del gas en Europa, donde hubo contagio pero ningún cambio en la inter-dependencia. Un caso que merece especial atención es el sector del petróleo y del gas de Estados Unidos y Europa: había una correlación significativa para las diferentes escalas de tiempo en los dos períodos que se incrementaron de acuerdo a la escala de días, lo que denota la inter-dependencia entre el precio del petróleo Brent y esta industria. Estos resultados son consistentes con los resultados empíricos recogidos en Sadorsky (2001) y El-Sharif et al. (2005).

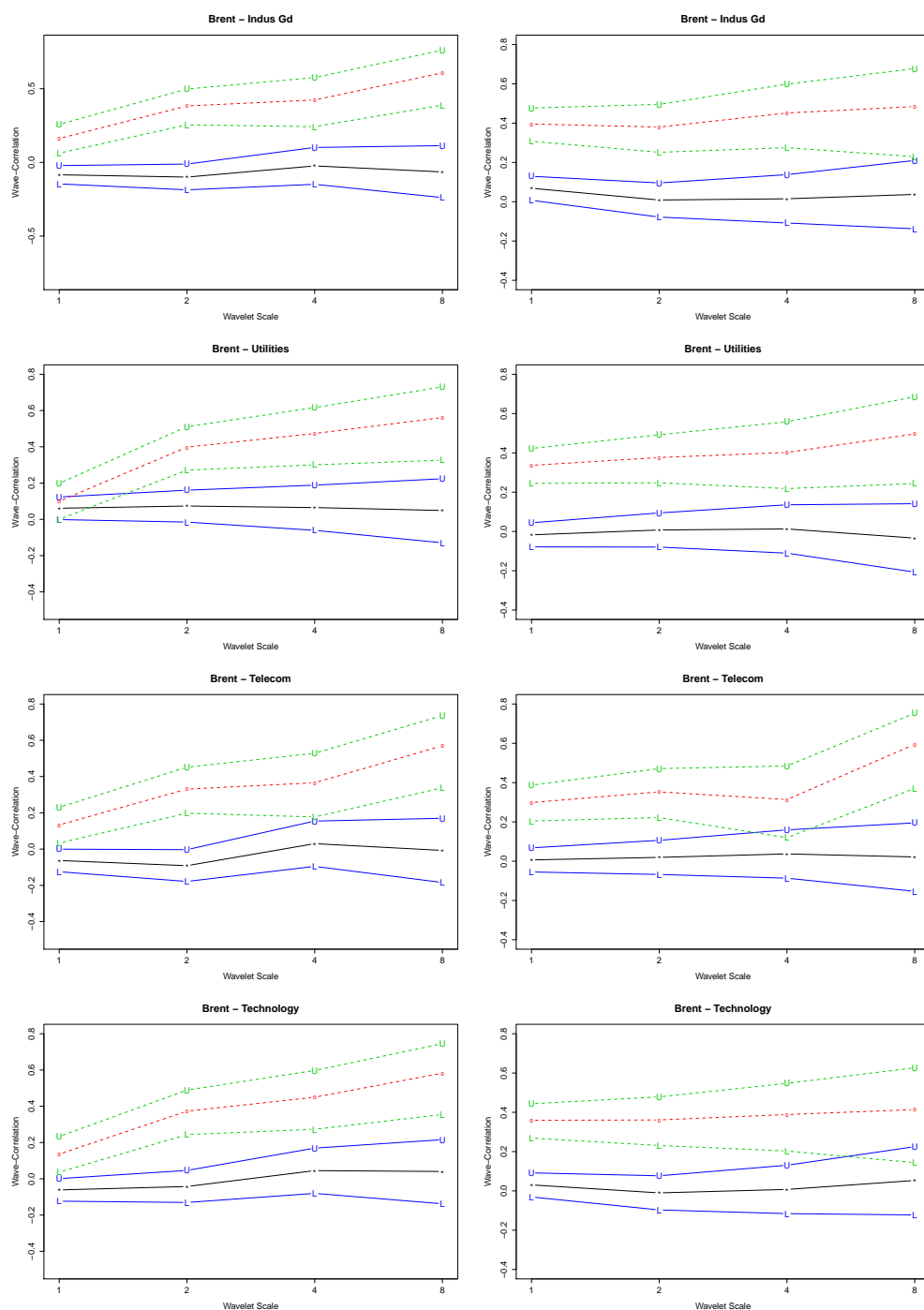
Hemos probado la hipótesis de *underreaction* (infra-reacción) mediante el análisis de la correlación cruzada wavelet entre las rentabilidades de las acciones y del petróleo dado que las correlaciones no pueden considerar el impacto del petróleo sobre los precios de acciones cuando no es inmediato (la hipótesis de *underreaction*). El poner a prueba la hipótesis de *underreaction* también está relacionado con las preocupaciones acerca de si los precios del petróleo tienen un impacto en los precios de las acciones y viceversa. Mediante el cálculo de la correlación cruzada wavelet entre las rentabilidades del petróleo y de las acciones para diferentes escalas de tiempo, se puede comprobar si hay algún efecto lag en la relación petróleo-valores. Las figuras 2.9 y 2.10 muestran una correlación cruzada wavelet entre el petróleo en un tiempo t y los índices de los valores agregados en el momento $t - \tau$ para los cuatro niveles de resolución y los dos períodos de análisis. Dos conclusiones emergen. La primera, la correlación cruzada entre el petróleo y los índices del mercado agregado es nula para todos los niveles de resolución en el período previo a la crisis. Por lo tanto, la hipótesis representada por la ecuación (2.42) no puede ser rechazada, por lo que la hipótesis de la *under* y *overreaction* no se mantiene para el período anterior a la crisis. La segunda, para el período posterior a julio de 2008, se observa no sólo que la inter-dependencia entre los mercados del petróleo y de valores aumentó, sino también que los precios del petróleo y de las acciones se condujeron entre sí, sobre todo para los niveles 3 y 4, indicado por las significativas correlaciones cruzadas positivas y negativas en ambos lados, derecho

Figura 2.7: Correlación wavelet entre el petróleo Brent y los índices sectoriales.



e izquierdo, de la gráfica. Este comportamiento de correlación se explica probablemente por los efectos de la interrelación entre los mercados del petróleo y de valores que se presentan como consecuencia del contagio financiero y el aumento de la inter-dependencia. Por consiguiente, la hipótesis representada por la ecuación (2.42) es rechazada al nivel de 95 %. Sin embargo, no se encontraron pruebas claras para apoyar la *under* u *overreaction* de los precios de las

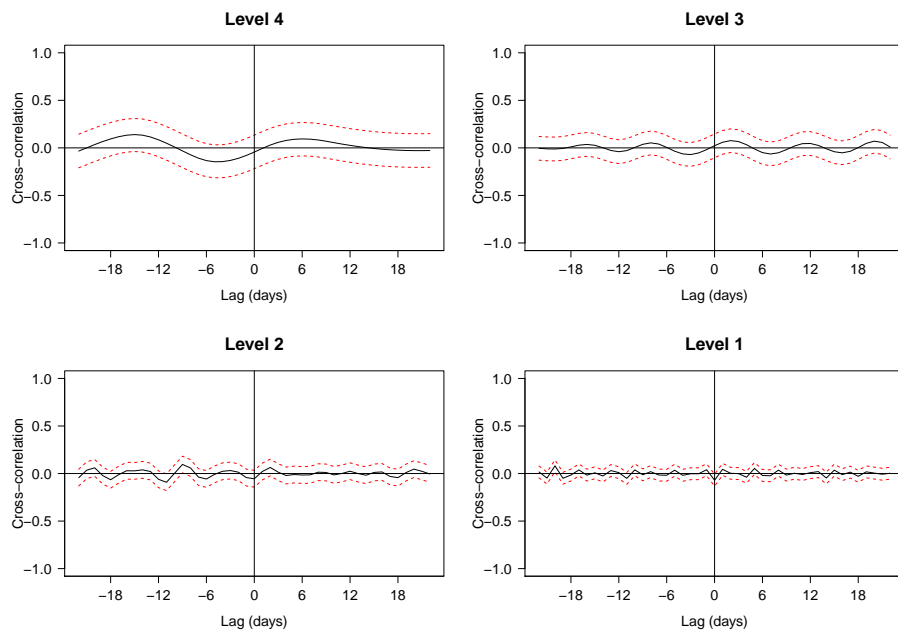
Figura 2.8: Correlación wavelet entre el petróleo Brent y los índices sectoriales.



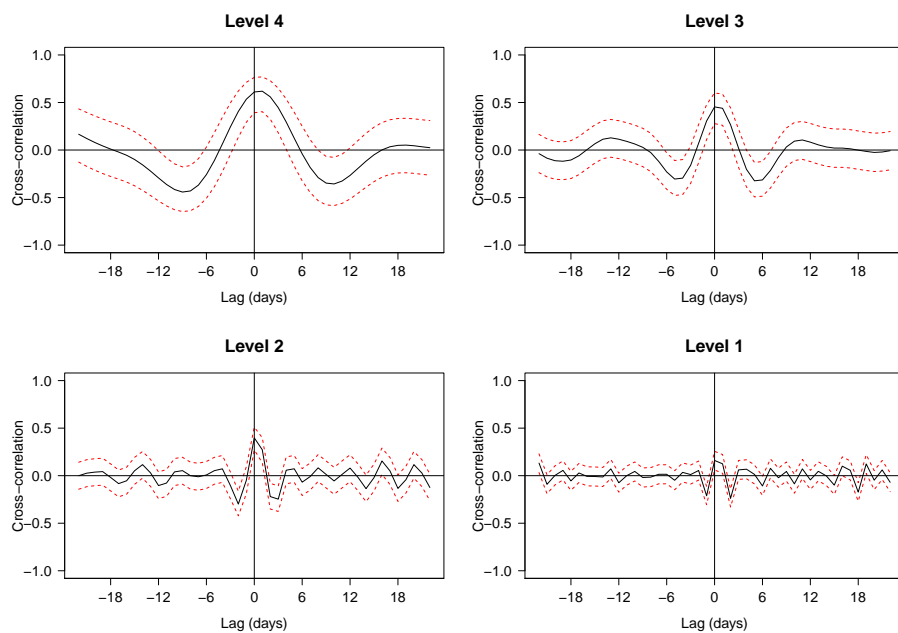
acciones a los precios del petróleo, o viceversa, ya que los valores estadísticos negativos y positivos se encontraban en ambos lados de la gráfica, derecho e izquierdo proporcionan apoyo a la complejidad en la interacción dinámica de *lead* y *lag*.

Al examinar las correlaciones cruzadas wavelet a nivel sectorial, las figuras 2.11–2.26 muestran evidencia similar para el índice del mercado agregado,

Figura 2.9: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el S&P 500.



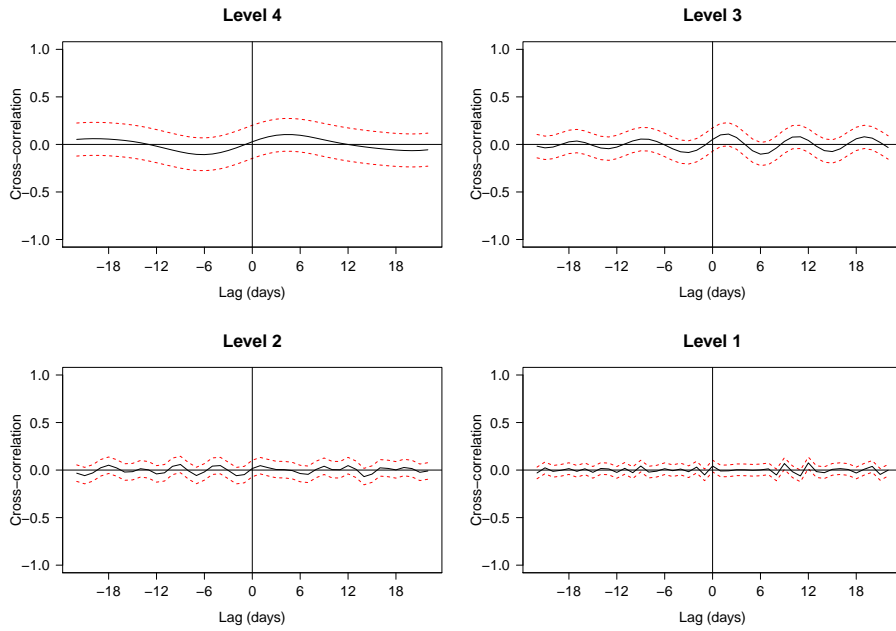
Panel A: Junio 2000 a Julio 2008



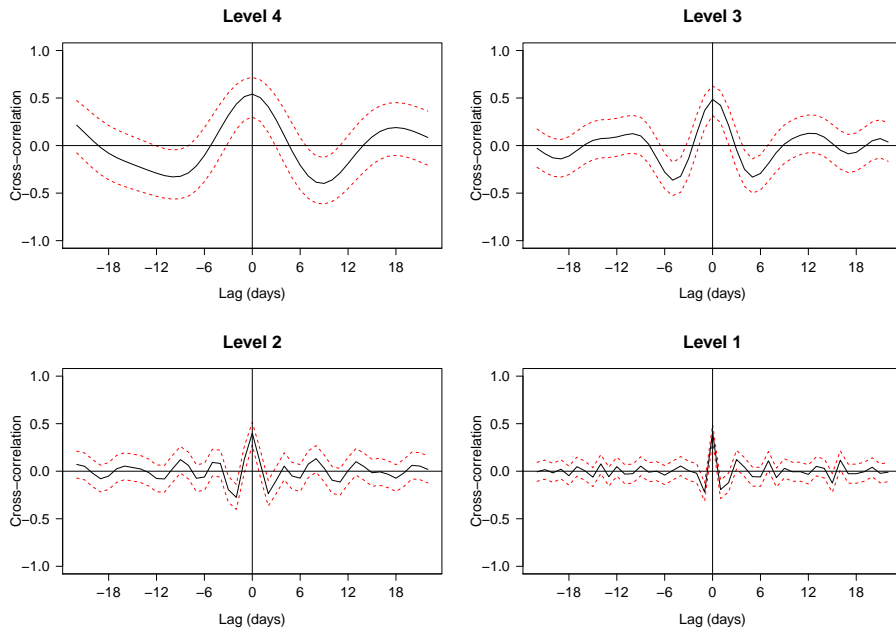
Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

en ambos períodos del muestreo. Vale la pena mencionar que los sectores de petróleo y de gas mostraron un particular comportamiento de correlación cruzada wavelet: en los dos períodos de muestreo se observó significativas correlaciones cruzadas positivas y negativas en los lados derecho e izquierdo de los gráficos, lo que corrobora la peculiaridad de los vínculos de este sector con el mercado del petróleo. Para los productos químicos y los servicios públicos, por

Figura 2.10: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el Dow Jones Stoxx Europe 600.



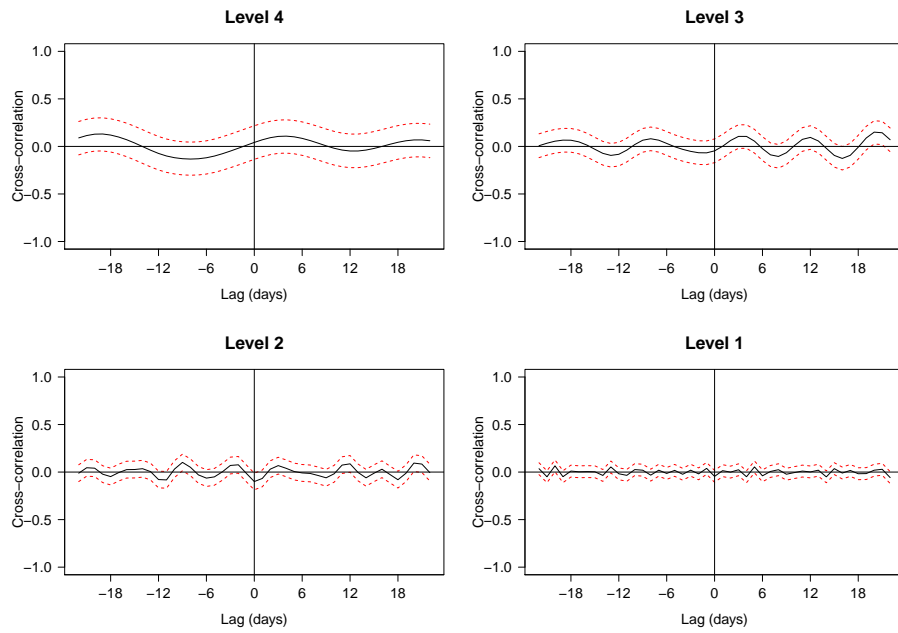
Panel A: Junio 2000 a Julio 2008



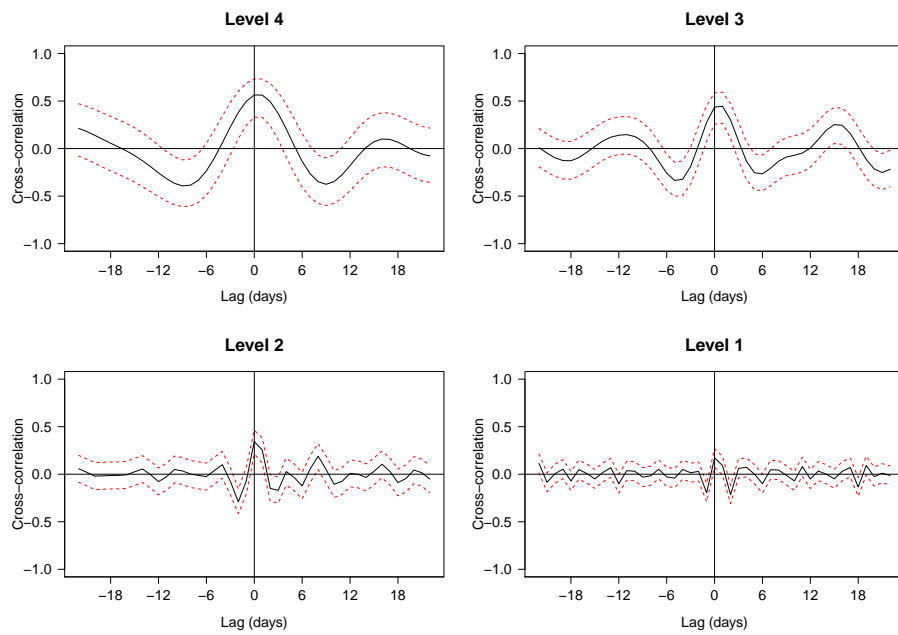
Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

el contrario, la hipótesis nula en la ecuación (2.42) no fue rechazada para ninguno de los períodos de la muestra por lo que la hipótesis de la infra-reacción es rechazada. En general, la evidencia de la correlación cruzada wavelet en diferentes niveles de resolución rechaza la hipótesis de *under* y *overreaction* para ambos períodos del muestreo. No hay ninguna evidencia de *lead* y *lags*

Figura 2.11: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Automóviles & Repuestos en Estados Unidos.



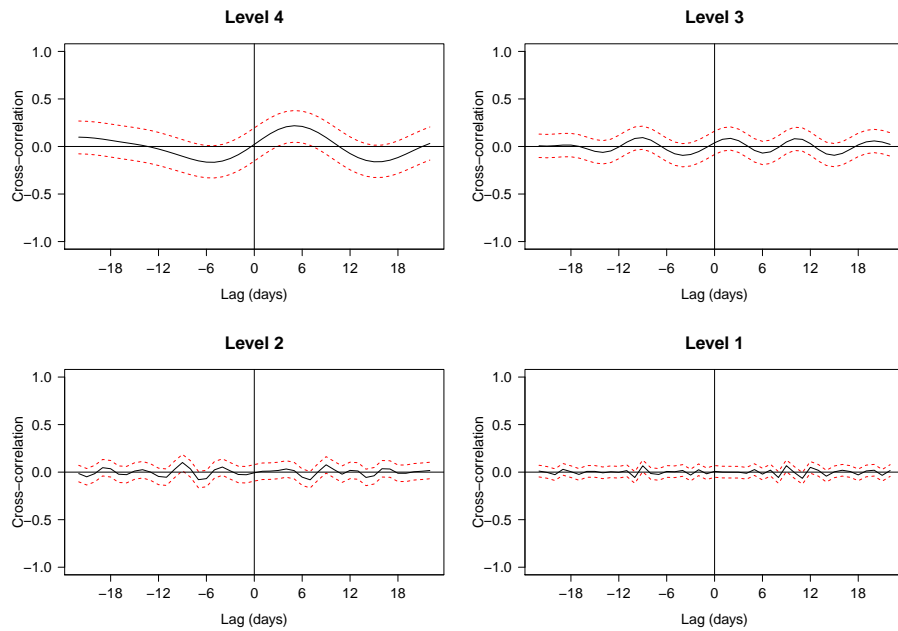
Panel A: Junio 2000 a Julio 2008



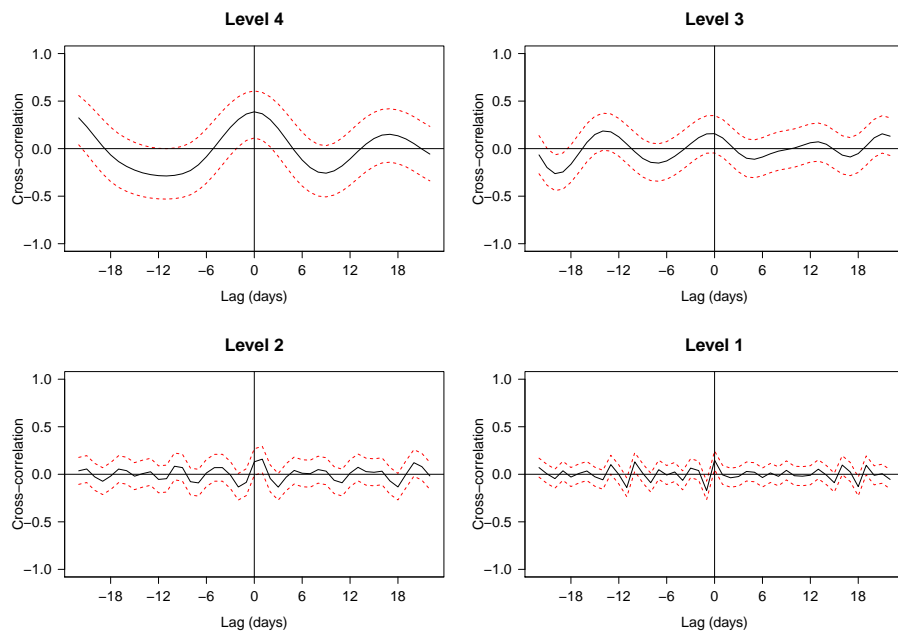
Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

en la relación de la rentabilidad del petróleo y de los valores, en su lugar se encuentra evidencia de interacciones complejas y dinámicas.

Figura 2.12: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Automóviles & Repuestos en Europa.

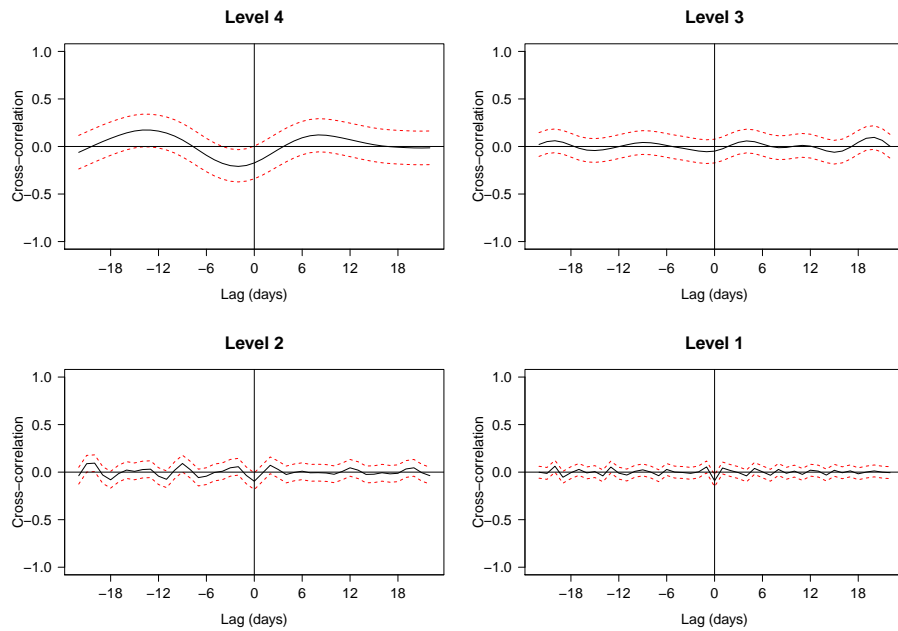


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

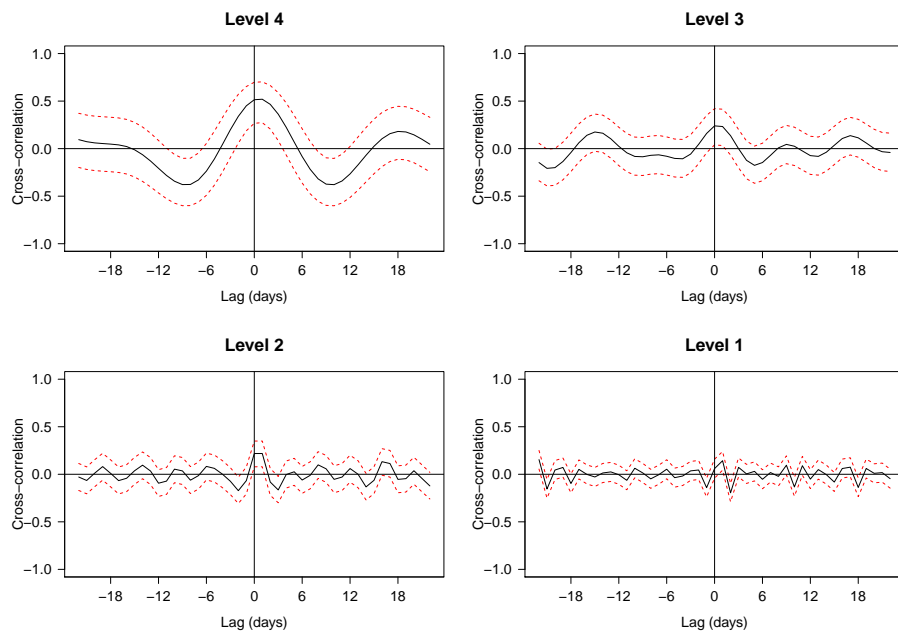


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.13: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Bancos en Estados Unidos.

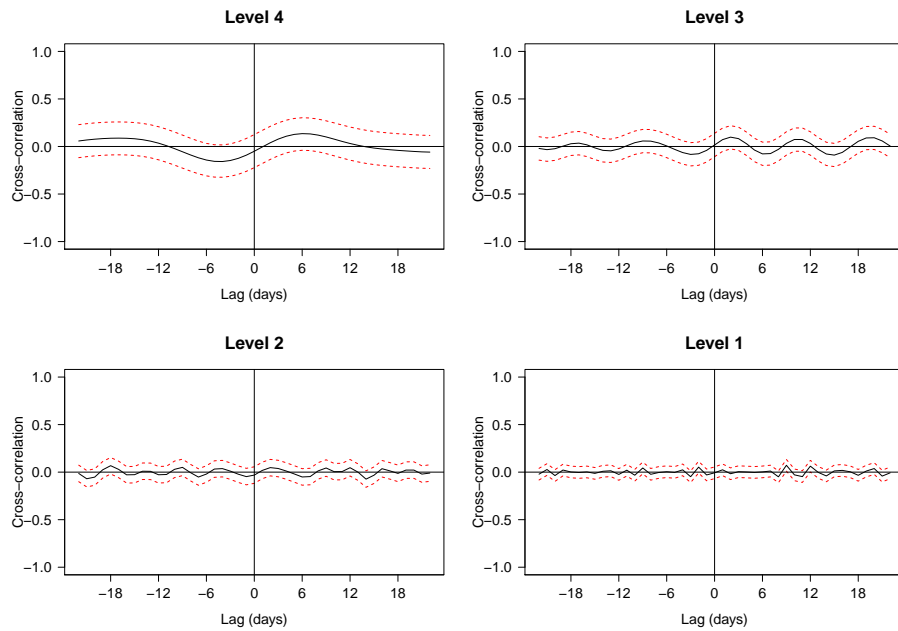


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

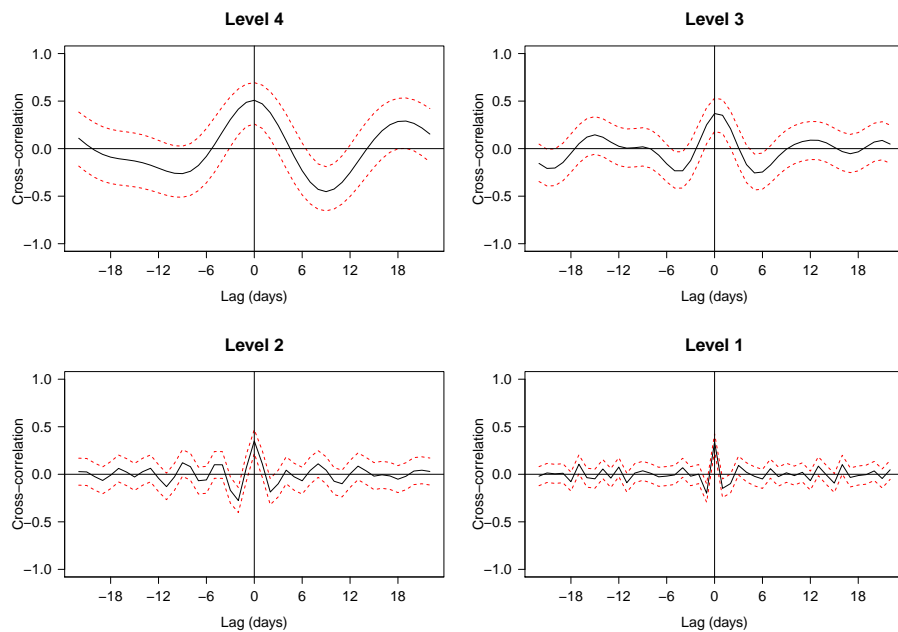


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.14: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Bancos en Europa.

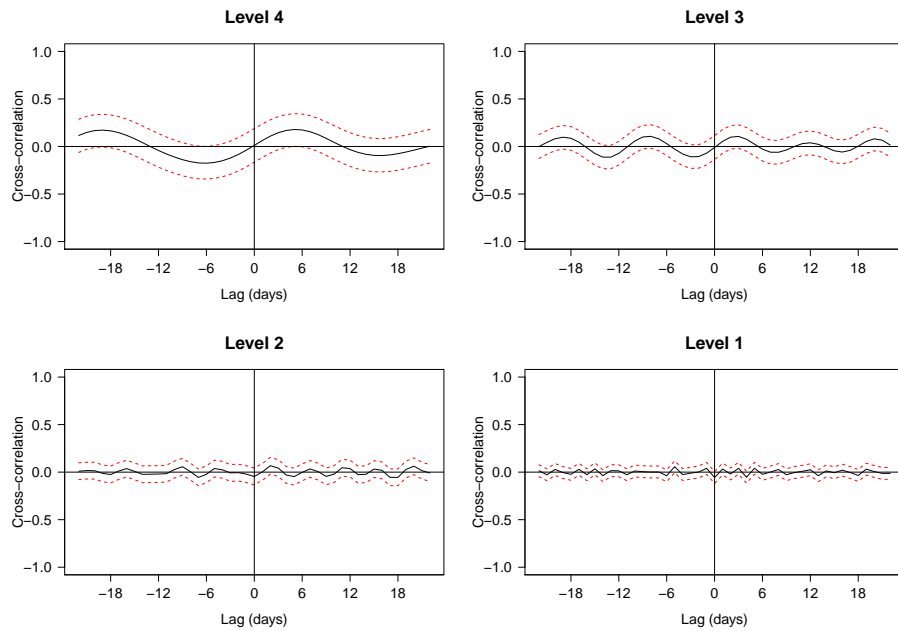


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

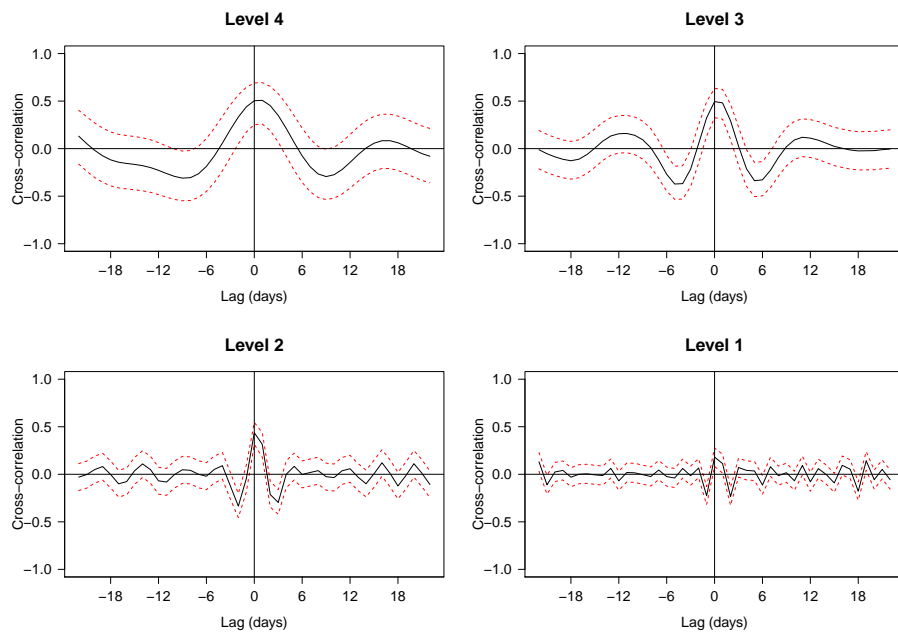


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.15: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Química en Estados Unidos.

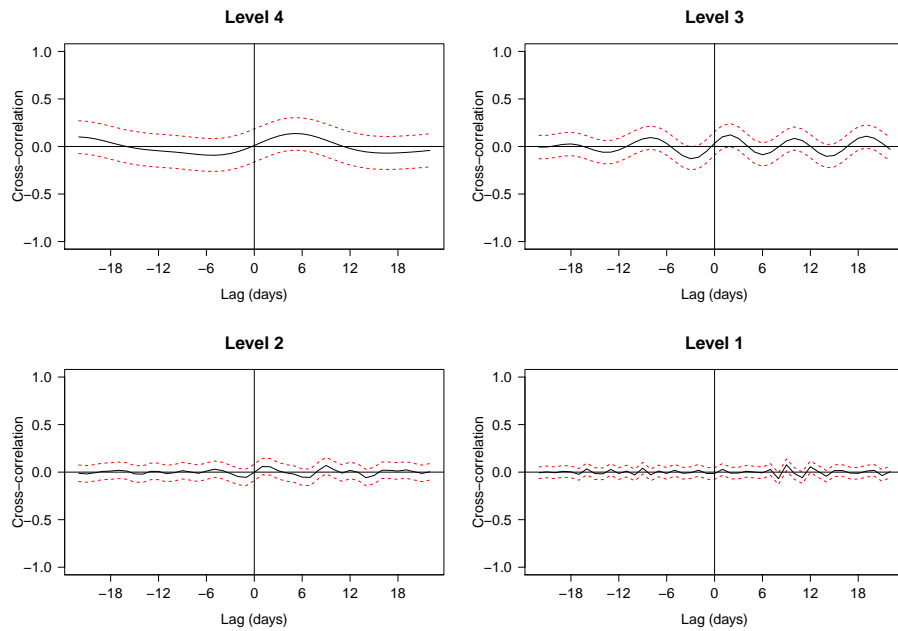


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

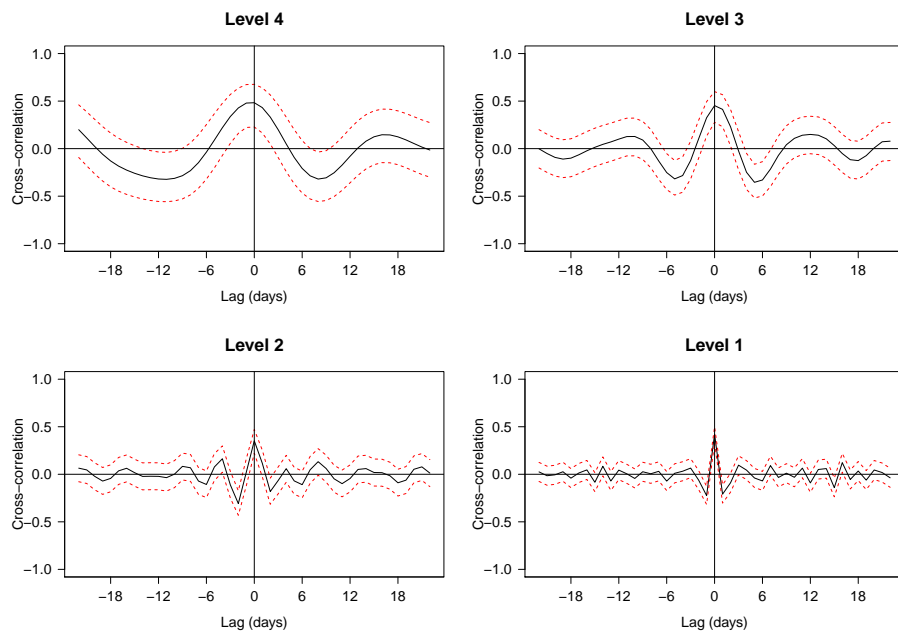


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.16: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Química en Europa.



Panel A: Junio 2000 a Julio 2008



Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.17: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de bienes Industriales en Estados Unidos.

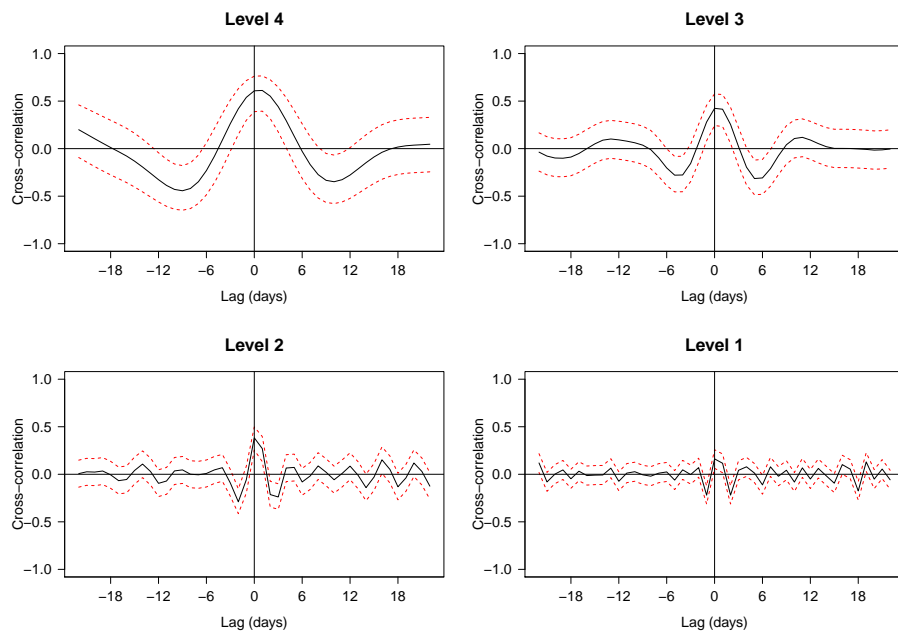
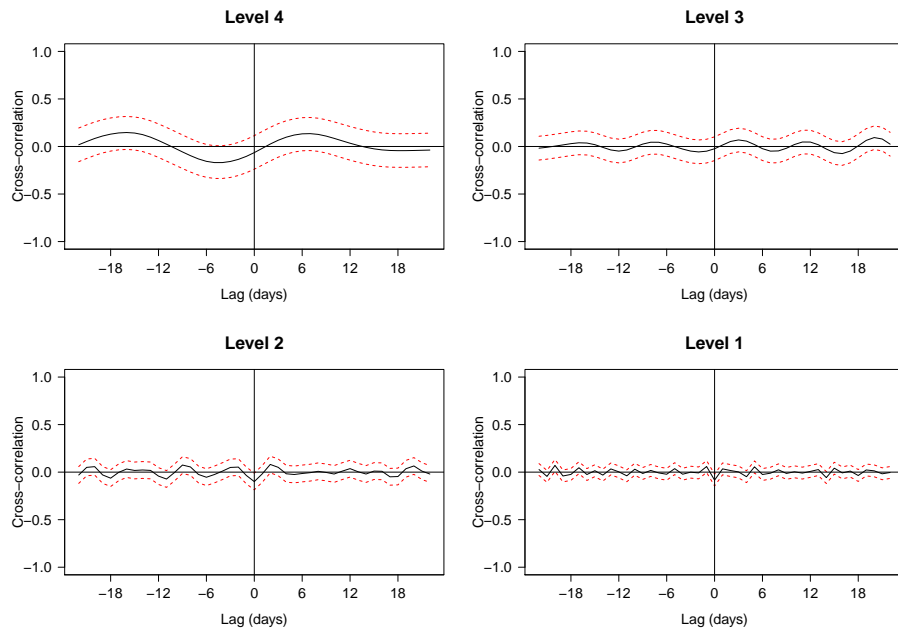
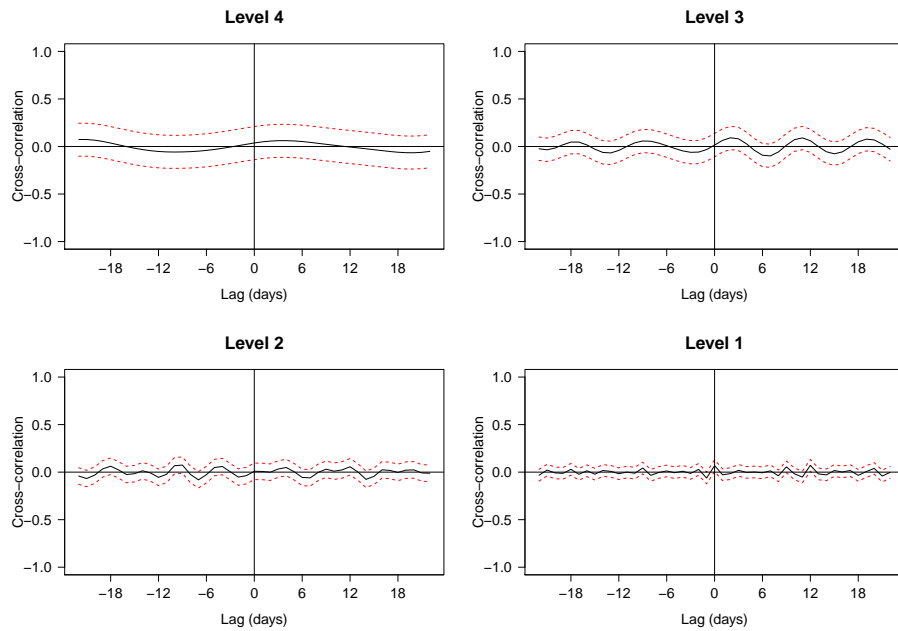
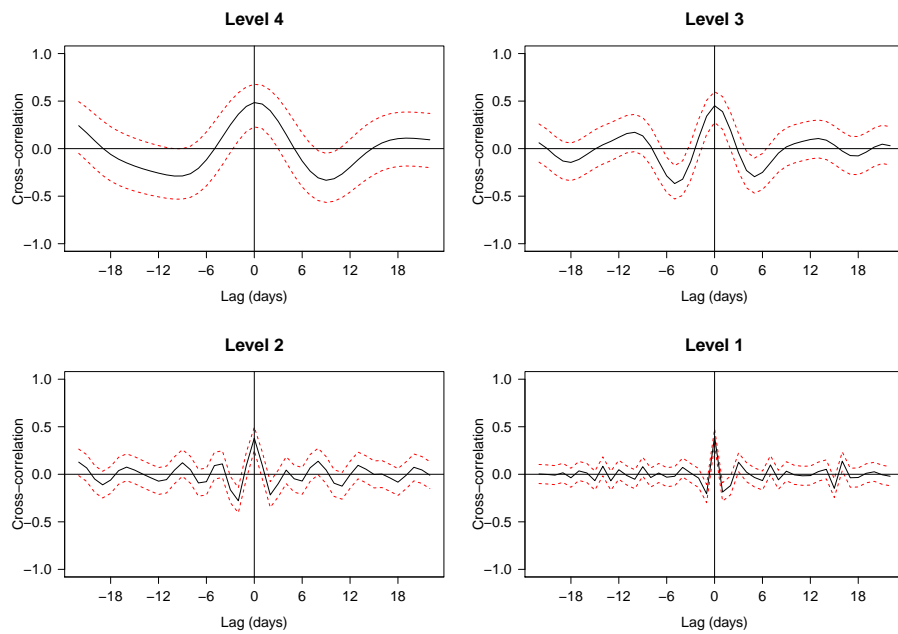


Figura 2.18: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de bienes Industriales en Europa.

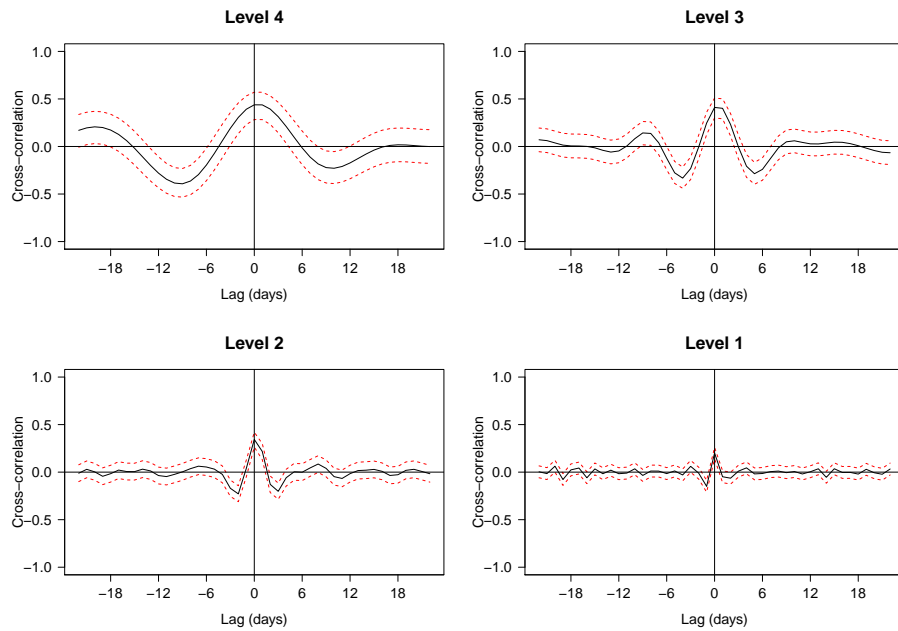


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

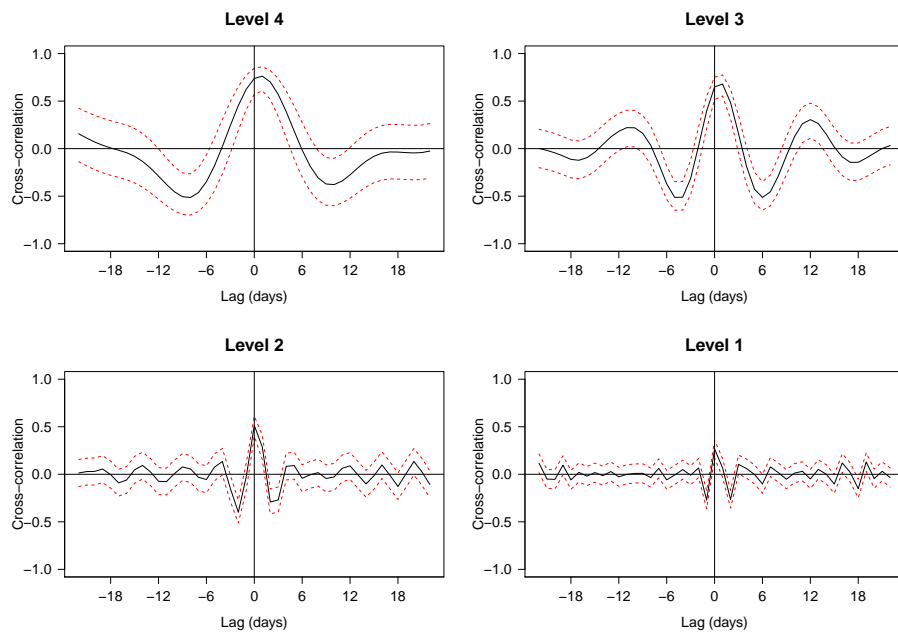


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.19: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Petróleo & Gas en Estados Unidos.

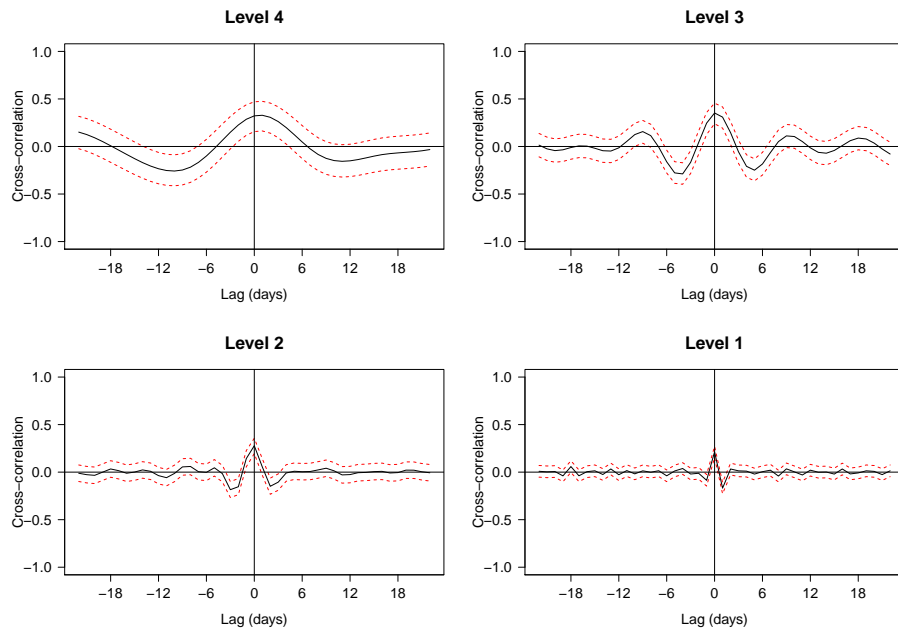


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

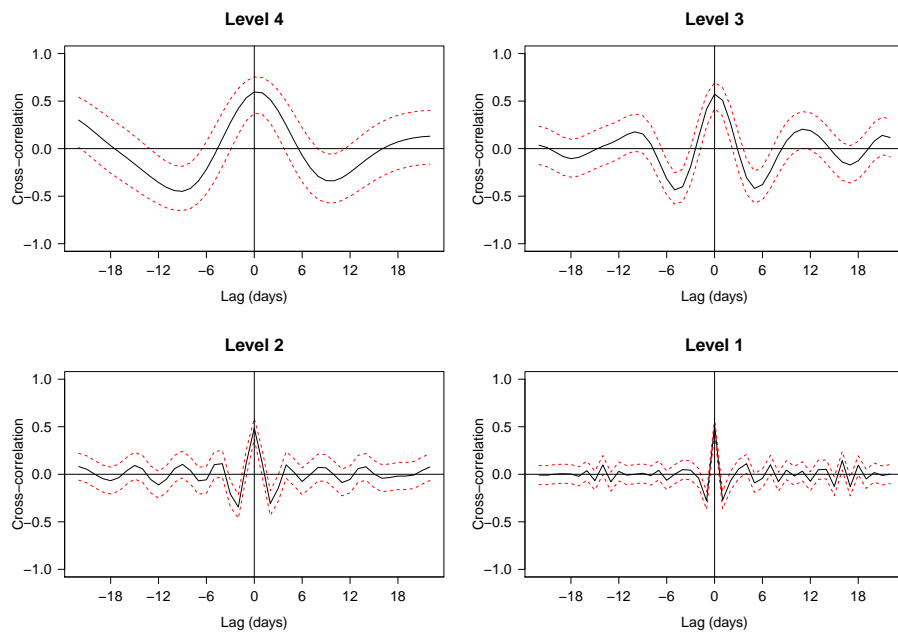


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.20: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Petróleo & Gas en Europa.

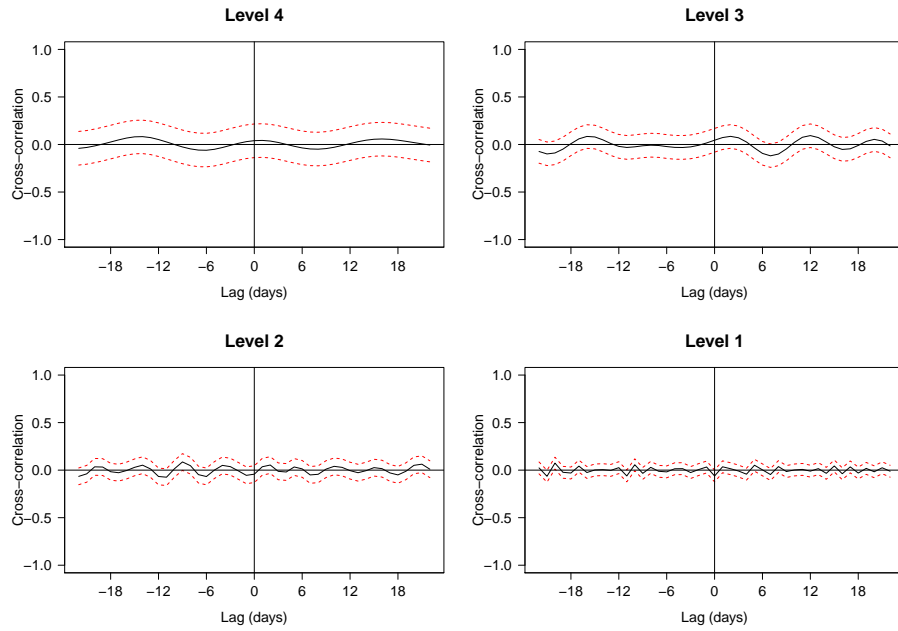


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

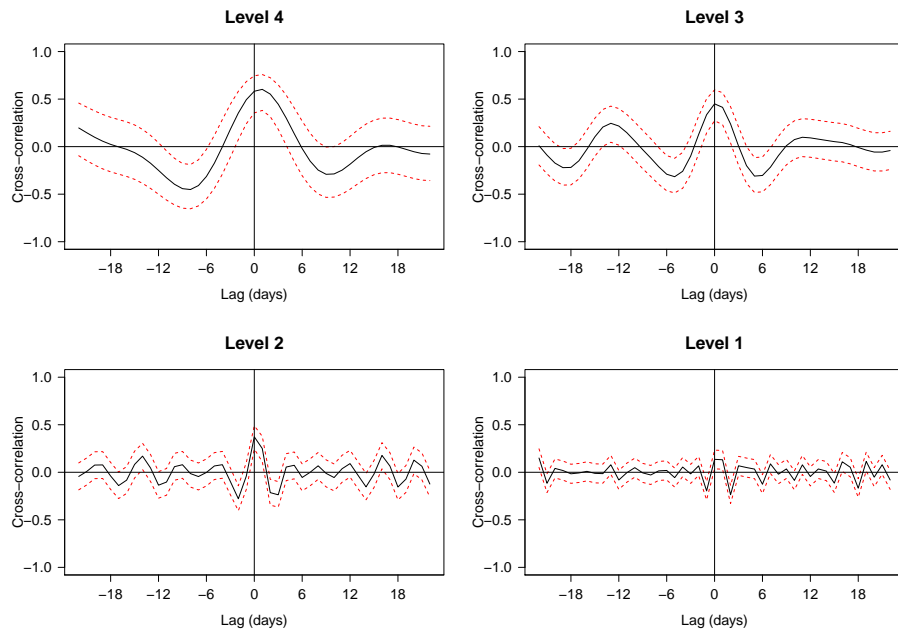


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.21: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Tecnología en en Estados Unidos.

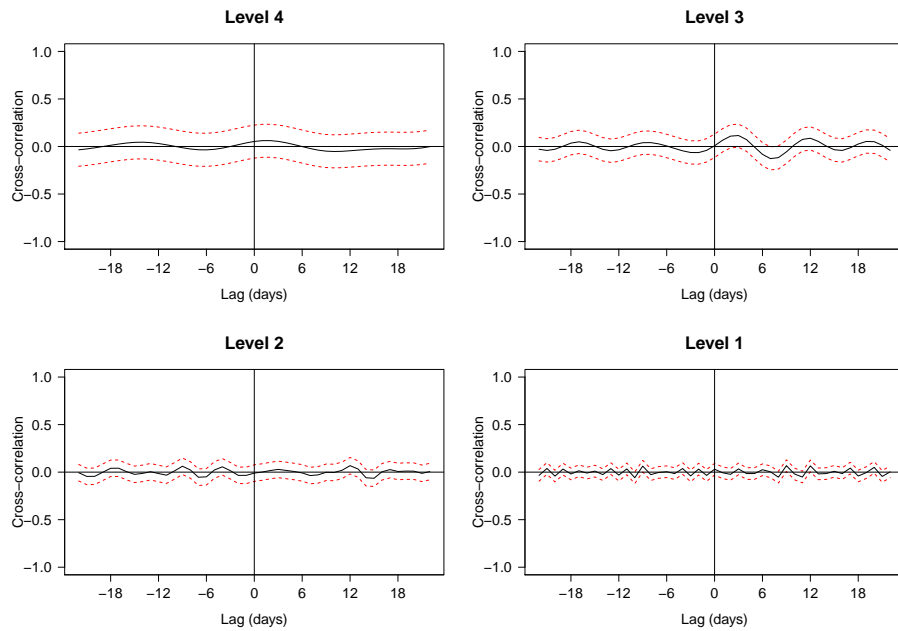


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

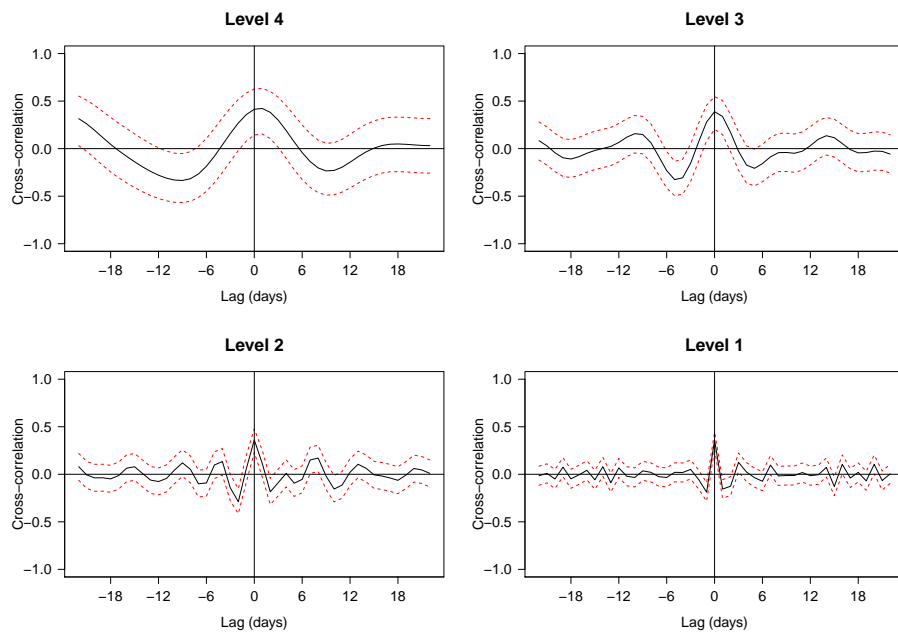


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.22: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Tecnología en Europa.

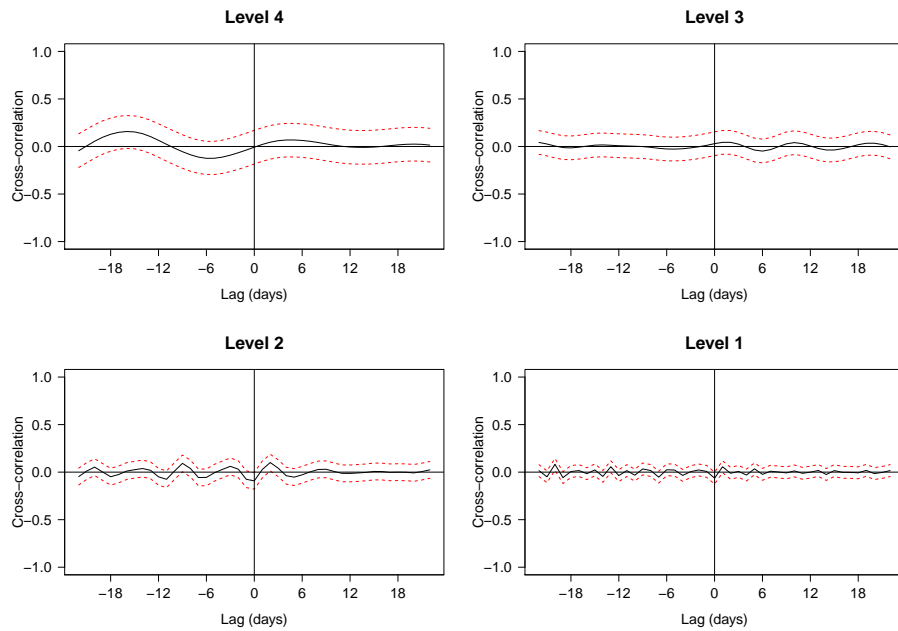


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

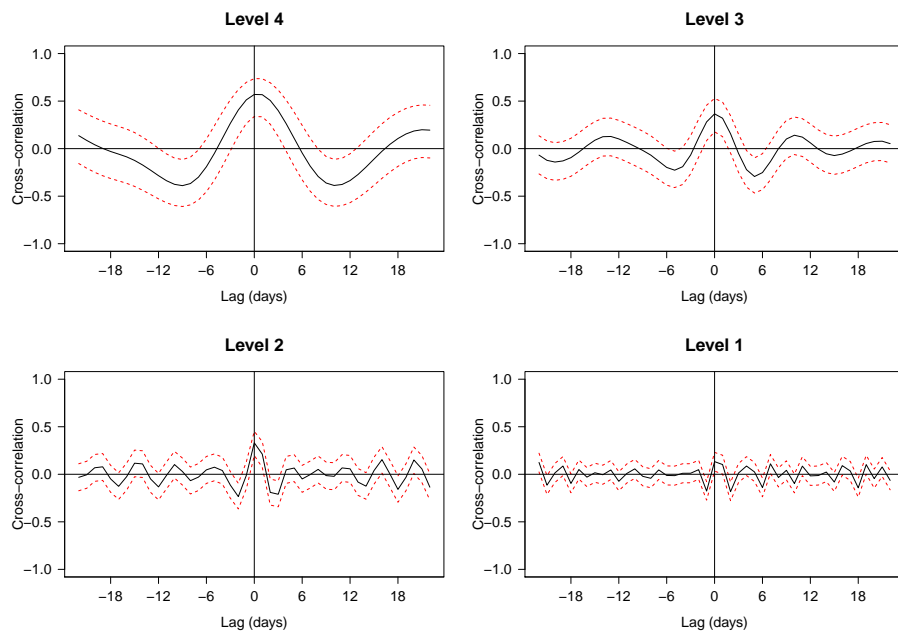


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.23: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Telecomunicaciones en Estados Unidos.

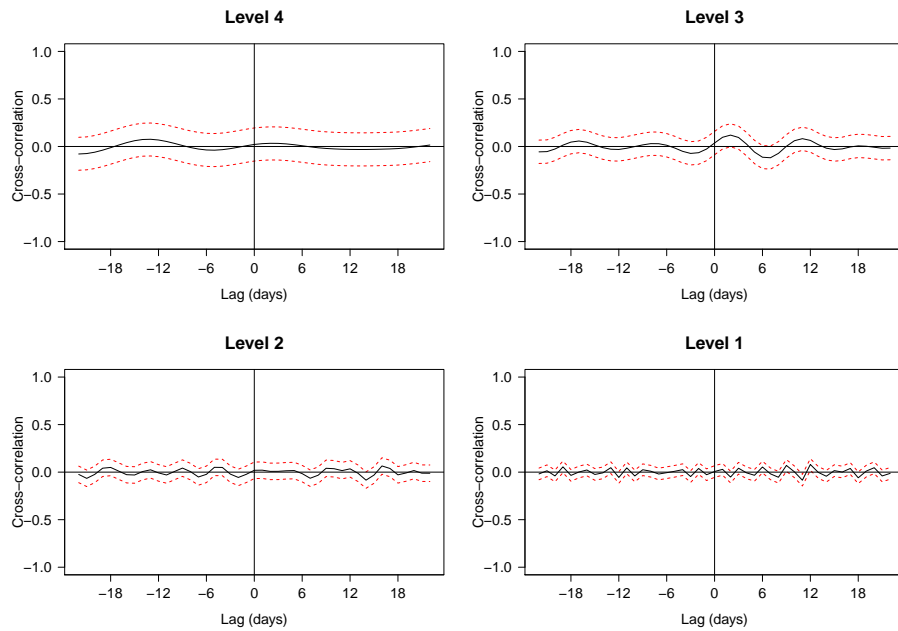


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

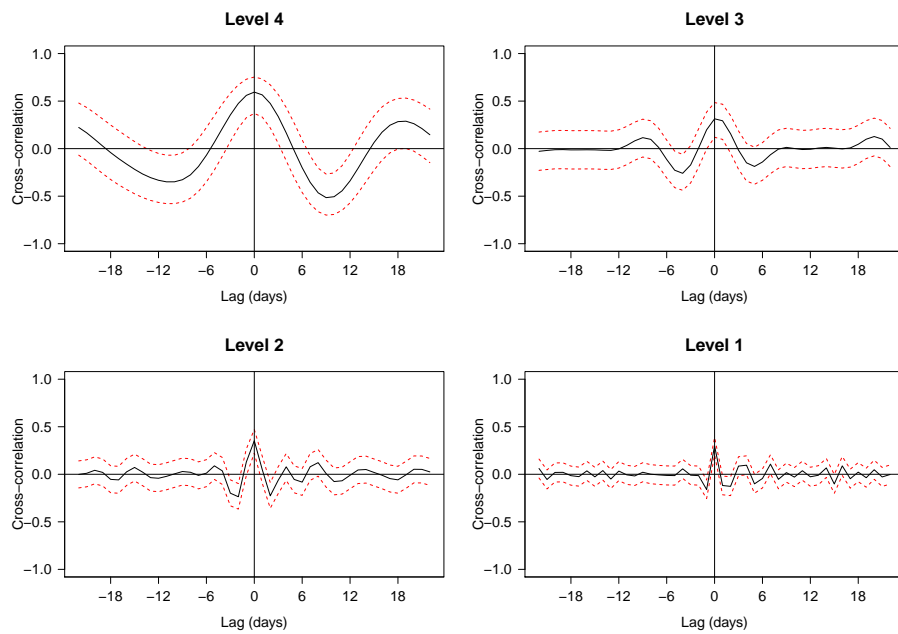


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.24: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Telecomunicaciones en Europa.

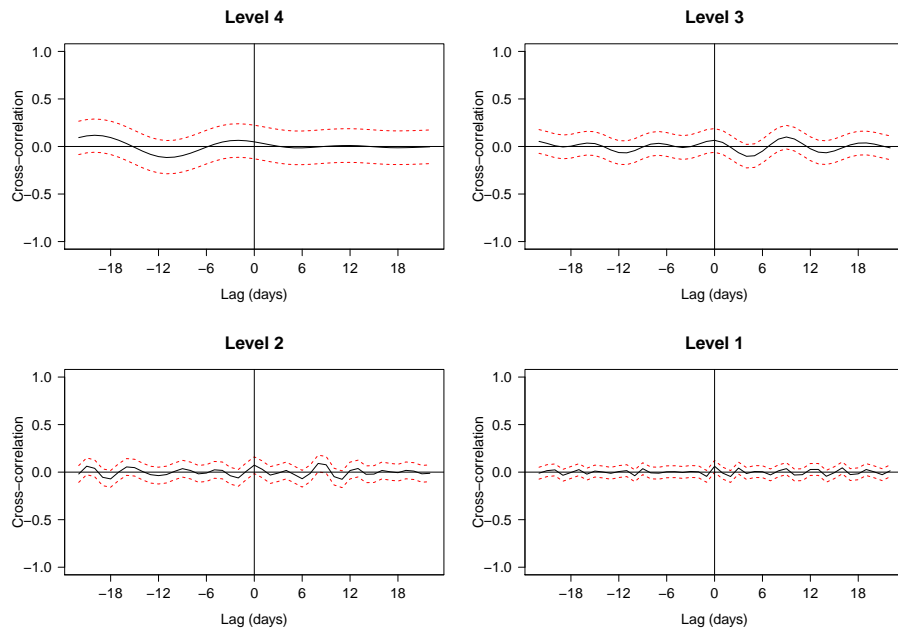


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

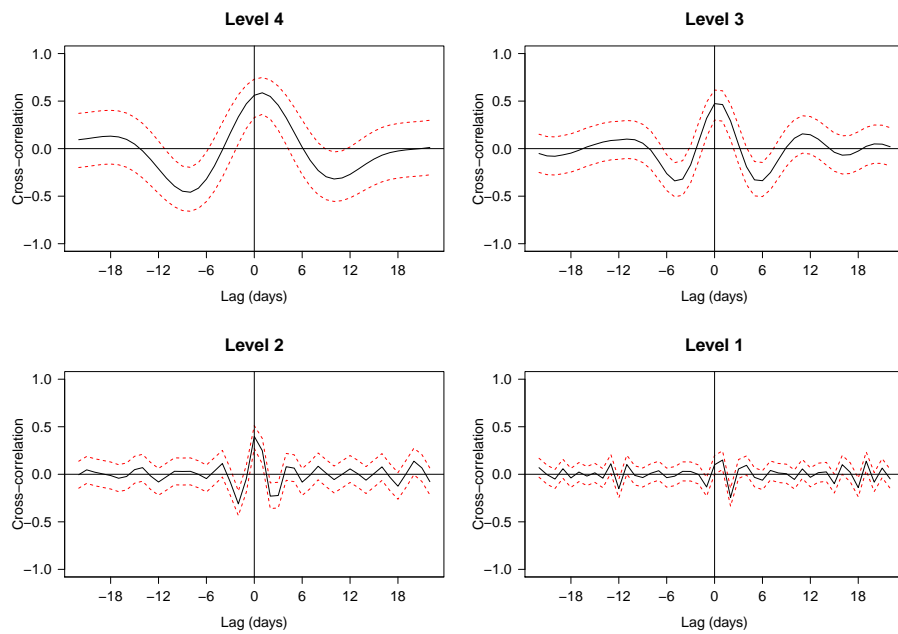


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.25: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Utilities en Estados Unidos.

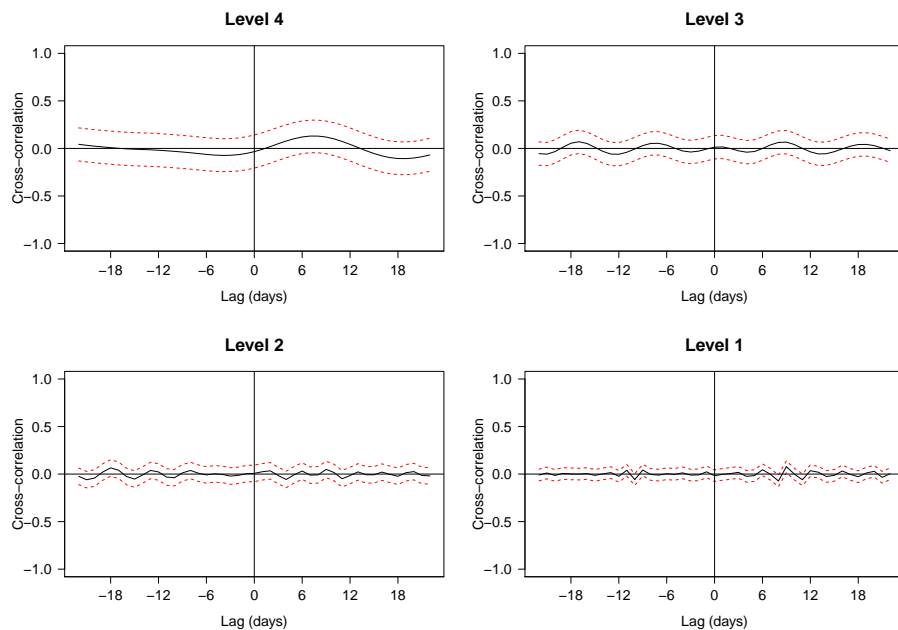


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

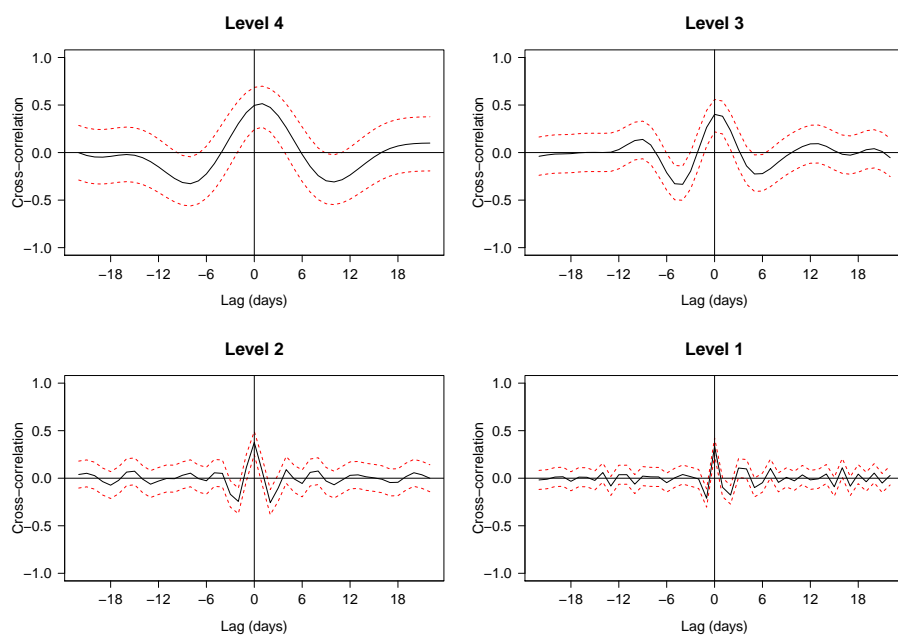


Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

Figura 2.26: Cross-correlación wavelet entre el petróleo Brent y el índice sectorial de Utilities en Europa.



Panel A: Junio 2000 a Julio 2008



Panel B: Julio 2008 a Julio 2011

2.4.5. Consideraciones finales

Mientras que la mayoría de la literatura empírica ha estudiado la dependencia entre el petróleo y las acciones en una escala de tiempo, en esta sección se ha analizado esta dependencia en diferentes escalas temporales utilizando

wavelets. Esta metodología es útil para la identificación de diferencias en la relación de precio del petróleo y las acciones en varias escalas de tiempo y también permite identificar cambios en esta relación en diferentes escalas. En particular, la propiedad de descomposición de la escala temporal que proporcionan las wavelets es útil para revelar el contagio y la inter-dependencia entre los precios del petróleo y las acciones en la reciente crisis financiera mundial, ya que el análisis de correlación wavelet se aplica una base de escala a escala para intervalos de confianza fiables en los periodos de crisis y los de no crisis. Los efectos de *lead* y *lag* del petróleo en los precios de las acciones también pueden ser analizados en diferentes escalas de tiempo a través de correlaciones cruzadas wavelet, por lo que la hipótesis de *underreaction* o de *overreaction* de los inversores puede ser probada escala a escala.

Nuestros hallazgos principales para los mercados de valores de Estados Unidos y de Europa, tanto en el nivel agregado como en el sectorial, para el período entre junio de 2000 hasta julio de 2011, pueden resumirse como sigue. En primer lugar, los cambios del precio del petróleo no tuvieron efectos en la rentabilidad del mercado de valores, ya sea a nivel agregado o sectorial, en el período previo a la crisis, con la excepción de acciones de compañías de petróleo y gas, que fueron positivamente afectadas por los movimientos del precio del petróleo. En segundo lugar, el contagio y la inter-dependencia positiva entre los precios del petróleo y de valores ha sido evidente en Europa y los Estados Unidos desde el inicio de la crisis financiera mundial, un resultado que en general se mantiene en los niveles agregados y sectoriales. En tercer lugar, el análisis de correlación cruzada de wavelet no proporciona ninguna evidencia de la *under* o *overreaction* en el periodo anterior a la crisis en los mercados del petróleo y de valores; sin embargo, con el inicio de la crisis financiera, los precios del petróleo condujeron a los precios de las acciones y viceversa a frecuencias más altas, mientras que para las frecuencias más bajas, los precios del petróleo y de valores se condujeron entre sí de manera compleja, ya que las correlaciones de *lead* y *lag* tenían tanto valores significativos positivos como negativos. Esta conclusión es similar para los niveles agregado y sectorial.

2.5. Un enfoque de descomposición wavelet para analizar la dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio

2.5.1. Introducción

El estudio de la relación entre los mercados del petróleo y la tasa de cambio es esencial para muchas aplicaciones financieras y económicas. Dado que el dólar americano (USD) es la moneda de facturación y la divisa de liquidación en los mercados internacionales del petróleo, las oscilaciones en la tasa de cambio del dólar americano afectan a los negociadores de petróleo así como a los países exportadores e importadores del mismo. Un dólar débil aumenta el poder adquisitivo de los países importadores de petróleo (excepto en Estados Unidos) pero afecta negativamente a los países exportadores de petróleo. Por el contrario, un dólar sobrevalorado puede afectar negativamente a los países importadores de petróleo y puede causar un shock de demanda que afecta finalmente a los países exportadores de petróleo. De la misma forma, un movimiento conjunto entre los mercados del petróleo y de cambio del dólar conduce a oportunidades de inversión o de especulación y tiene implicaciones para la fijación de precios, cobertura de divisas y las opciones sobre la energía (ver, e.g., Salmon y Schleicher, 2007), la optimización de las carteras de petróleo y de divisas (ver, e.g., Beine, 2006) y la gestión de riesgo monetario (ver, e.g., Marimoutou et al., 2009; Sadegui y Shavvalpour, 2006). En consecuencia, la dependencia entre los mercados del petróleo y de divisas es de gran interés para los reguladores y los inversores, teniendo en cuenta sus implicaciones para el diseño de la política y la gestión de inversión.

En este estudio, se analiza la inter-dependencia del mercado del petróleo y de la tasa de cambio para diferentes escalas de tiempo utilizando el análisis de multi-resolución wavelet. Anteriores estudios empíricos sobre el nexo de la tasa de cambio y el petróleo (véase la Sección 2 a continuación) han examinado los efectos de la tasa de cambio del dólar sobre los precios del petróleo o viceversa para una o, a lo sumo, dos escalas de tiempo (a corto como a largo plazo). Sin embargo, la transmisión del petróleo o los shocks de la tasa de cambio del dólar pueden ser observados para diferentes escalas de tiempos ya que los inversores en los mercados del petróleo y del dólar son heterogéneos con respecto a los horizontes de inversión y también por la existencia de las relaciones de *lead* y *lag* entre los mercados al contado y de futuro. Varios estudios han empleado el enfoque wavelet para abordar el estudio de las propiedades dinámicas de

diferentes fenómenos financieros y económicos, tales como las relaciones entre la oferta monetaria y el *output* (Ramsey y Lampart, 1998a), los gastos e ingresos (Ramsey y Lampart, 1998b), las rentabilidades de las acciones y la inflación (Kim y In, 2005), los ciclos económicos (Gallegati, 2010; Yogo, 2008) y los precios de bienes de capital para diferentes escalas de frecuencia de tiempo (Fernandez, 2005; Gençay et al., 2005). Sin embargo, ningún estudio ha utilizado wavelets para analizar la relación entre los mercados del crudo del petróleo y de la tasa de cambio del dólar para diferentes escalas de tiempo.

Los wavelets proporcionan un enfoque de filtrado que implica la descomposición de una serie de tiempo en componentes de frecuencia diferentes, con cada resolución correspondiente a su propia escala de tiempo. Las escalas de tiempo menores capturan los componentes de la serie de tiempo de mayor frecuencia, que se producen durante períodos de tiempo muy cortos, mientras que las escalas de tiempo más altas capturan a los componentes de frecuencia más bajas, que se producen durante períodos muy largos de tiempo. La serie original se transforma a través de funciones especiales (base) llamados wavelets resultantes de una serie de aproximaciones sucesivas (similar a las series de Fourier) representadas por el seno y el coseno. Las funciones wavelet tienen la propiedad de concentrar la energía en el tiempo para proporcionar un análisis de la no-estacionariedad y los cambios de la volatilidad en el tiempo-espacio (Burrus et al., 1998; Rua y Nunes, 2009). Una característica interesante del modelado wavelet es que la descomposición de multi-resolución de la transformada wavelet puede ser utilizada para identificar el contagio y la inter-dependencia entre el mercado del crudo del petróleo y el mercado de la tasa de cambio del dólar. La transmisión del shock debido al contagio es rápida y se desvanece rápidamente, por lo que en cuestión de días, los cambios en las correlaciones wavelet entre la rentabilidad del petróleo y la tasa de cambio del dólar en las frecuencias más altas se asocian con el contagio, mientras que los cambios a frecuencias más bajas se asocian con la inter-dependencia o el co-movimiento (ver Gallegati, 2010). Por lo tanto, es posible contrastar la posible ocurrencia de un contagio del mercado financiero y de cambios en la inter-dependencia entre el mercado del crudo y el mercado de los tipos de cambio del dólar durante la reciente crisis financiera mundial. El test consiste en si los intervalos de confianza de los coeficientes de correlación wavelet en diferentes escalas de tiempo para los períodos anterior y posterior al inicio de la crisis financiera se solapan Gallegati (2010).

Además, dado que los modelos teóricos proponen que los inversores tienden a infra-reaccionar ante una nueva información pública en el corto plazo

y tienden a sobre-reaccionar a más largo plazo (Barberis et al., 1998; Daniel et al., 1998; Hong y Stein, 1999; Poteshman, 2001), se ha contrastado si los precios (retardados) del petróleo sobre la rentabilidad de la tasa de cambio y viceversa para diferentes escalas de tiempo son significativos utilizando cross-correlaciones wavelets. Así se puede evaluar la sincronización de los inversores y verificar la hipótesis de infra-reacción.

El análisis empírico se centró en la relación entre el crudo y la tasa de cambio del dólar americano frente a un amplio conjunto de monedas para el período de enero de 2000 a octubre de 2011. Nuestros nuevos resultados basados en el uso de las transformadas wavelet revelan tres hechos. En primer lugar, los precios del petróleo y los mercados de la tasa de cambio eran independientes en el período anterior a la crisis financiera, con correlaciones próximas a cero para escalas de tiempo inferiores y correlaciones no significativas para mayores escalas de tiempo. Esta prueba fue común para todas las tasas de cambio del dólar americano examinados. En segundo lugar, las correlaciones wavelets disminuyeron significativamente en el periodo posterior a julio de 2008 para todas las escalas de tiempo, lo que demuestra tanto el contagio como el aumento de la inter-dependencia negativa entre los mercados del petróleo y de los tipos de cambio en el período posterior al inicio de la crisis financiera mundial. El hecho de que los mercados del petróleo y de la tasa de cambio se volvieran más negativamente dependientes en el período posterior al inicio de la crisis financiera significa que los beneficios de la diversificación de los inversores que operan en esos mercados se incrementaron considerablemente. En tercer lugar, el análisis de la correlación cruzada wavelet indica que no hubo *underreaction* (infra o sobre-reacción) en cualquiera de los dos mercados estudiados en el período anterior a la crisis financiera. Sin embargo, con el inicio de la crisis financiera, los precios del petróleo lideraron a la tasa de cambio del dólar americano y viceversa para las frecuencias más altas, posiblemente como resultado del efecto de contagio. La situación era bastante diferente para las frecuencias menores, ya que los precios del petróleo y de valores se dirigieron mutuamente de manera compleja y las correlaciones de *lead* y *lag* tuvieron valores significativos tanto positivos como negativos.

2.5.2. Revisión bibliográfica

Las explicaciones teóricas de la relación de los precios del petróleo y las tasas de cambio están bien establecidas. Por un lado, el impacto de los precios del petróleo en los movimientos de las tasas de cambio fue discutido inicialmente por Golub (1983) y Krugman (1983): un país exportador de petróleo (impor-

tador de petróleo) pueden experimentar una apreciación de la tasa de cambio (depreciación) cuando los precios del petróleo aumentan y una depreciación (apreciación) cuando los precios caen. Por otro lado, el papel de las tasas de cambio en la explicación de los movimientos de los precios del petróleo se basa en la ley de un precio único para los bienes negociables (Bloomberg y Harris, 1995): dado que el petróleo es un producto homogéneo y básico de comercio internacional tasado en dólares, una depreciación del dólar reduce el precio del petróleo para los extranjeros en relación con sus productos tasados en moneda extranjera y por lo tanto aumenta el poder adquisitivo y la demanda del petróleo de los consumidores extranjeros, lo que a su vez, empuja hacia arriba el precio del crudo en dólares. Consistente con estas explicaciones teóricas, la literatura empírica sobre el vínculo entre los precios del petróleo y la tasa de cambio del dólar ha investigado la influencia recíproca entre la tasa de cambio del dólar y el precio del petróleo, generalmente hallando una relación negativa entre ellos.

La evidencia del papel de los precios del petróleo en la explicación de la tasa de cambio real fue reportada por Amano y Norden (1998), quienes utilizaron la teoría de la co-integración, y por Camarero y Tamarit (2002), que emplearon las técnicas del panel con co-integración. Del mismo modo, Akram (2004) ha aportado pruebas de una relación no negativa entre los precios del petróleo y la tasa de cambio para Noruega que variaba con el nivel de los precios del petróleo y la tendencia. Con el uso de un modelo auto-regresivo de vector estructural de cuatro dimensiones (VAR), Huang y Guo (2007) encontraron que los precios reales del petróleo tuvieron un efecto menor de apreciación sobre la tasa de cambio real en China y las regulaciones gubernamentales de la energía. Por el contrario, tomando los datos mensuales del panel para los países del G7, Chen y Chen (2007) demostraron la naturaleza dominante de los precios reales del petróleo en los movimientos reales de la tasa de cambio y su capacidad de predicción. La evidencia de una relación negativa entre los cambios del precio del petróleo y de la tasa de cambio fue proporcionada por Cifarelli y Paladino (2010), que utilizaron un modelo de heterocedasticidad condicional auto-regresivo generalizado multi-variante (GARCH-M). El uso del análisis de co-integración por un enfoque monetario de la determinación de la tasa de cambio, Lizardo y Mollick (2010) demostraron la contribución significativa de los precios del petróleo en la explicación de los movimientos del dólar a largo plazo, apoyando una relación negativa entre los precios del petróleo y el dólar estadounidense.

Otros estudios empíricos han resaltado el papel desempeñado por un dólar

débil sobre los precios del petróleo. Sadorsky (2000) investigó la relación entre los precios futuros del petróleo y las diferentes tasas de cambio del dólar, hallando evidencia de la causalidad de Granger desde las tasas de cambio hasta los precios futuros de la energía. Indjehagopian et al. (2000) también han señalado que las variaciones en las tasas de cambio tienen un impacto en los precios del petróleo. El impacto de las fluctuaciones del dólar en la formación de los precios del petróleo OPEP ha sido examinado utilizando el método general de momentos de Yousefi y Wirjanto (2004), quienes proporcionaron evidencia de una correlación negativa entre las fluctuaciones de las tasas de cambio del dólar y la formación de los precios del petróleo OPEP. Con el uso de un modelo de corrección de errores vectorial, Krichene (2005) proporciona evidencia de los diferentes impactos de una caída en la tasa de cambio nominal efectiva sobre los precios del petróleo a corto y largo plazo. A pesar de la influencia de la tasa de cambio del dólar sobre los precios del petróleo a largo plazo, Zhang et al. (2008) reporta evidencia de un efecto limitado a un corto plazo y de un ligero riesgo de efecto de desbordamiento desde el mercado de divisas al mercado del petróleo. Para los datos trimestrales, Akram (2009) reporta evidencia que sugiere que un dólar más débil conduce a precios más altos del petróleo y que los shocks del dólar representan las fluctuaciones del precio del petróleo. Con el uso de dos medidas de dependencia, es decir las correlaciones y las cópulas, Reboredo (2011) examinó cómo los precios del petróleo y las tasas de cambio se mueven conjuntamente y documentó dos hallazgos principales para una amplia gama de divisas: la dependencia entre el precio del petróleo y la tasa de cambio era en general débil, a pesar de que aumentó considerablemente en el período posterior a la aparición de la crisis financiera global, y que no hubo dependencia extrema de mercados entre los precios del petróleo y las tasas de cambio.

En la literatura se han identificado diferentes formas de explicar la relación negativa entre los precios del petróleo y la tasa de cambio del dólar en la mayor parte de los estudios empíricos. Para empezar, si el dólar se deprecia, el precio del petróleo cae para los consumidores no-americanos y su demanda de petróleo crudo se ve afectada, el cual con el tiempo empuja los precios hacia arriba. En segundo lugar, algunos países exportadores de petróleo deciden utilizar las divisas vinculadas al dólar como medio de estabilización del poder adquisitivo de sus exportaciones en dólares con relación a las importaciones en divisas distintas al dólar. Por último, cuando el dólar es más débil, el petróleo se vuelve más atractivo como inversión, ya que la debilidad del dólar reduce la rentabilidad sobre los denominados activos financieros del dólar. A pesar

de que esta relación negativa ha sido confirmada por la mayoría de los estudios empíricos mencionados anteriormente, ninguna investigación empírica ha examinado si la relación entre el precio del petróleo y la tasa de cambio del dólar es la misma para diferentes escalas de tiempo o si esta relación ha cambiado en respuesta a la crisis financiera mundial. A continuación se tienen en cuenta estas dos dimensiones de la relación dólar-petróleo y se discuten las implicaciones para el diseño de la política y la negociación del mercado.

2.5.3. Marco teórico

La relación entre el dólar y el precio del petróleo se puede fundamentar en la ley del precio único: dado que el petróleo es un producto homogéneo y objeto de comercio internacional tasado en dólares, el precio del petróleo en moneda extranjera está dado por la ecuación:

$$p^* = e + p, \quad (2.43)$$

donde p^* es el (log) del precio del petróleo en unidades de moneda extranjera, p es el (log) del precio del petróleo en dólares y e es el (log) de la tasa de cambio nominal del dólar (moneda extranjera por unidad de dólar). Por lo tanto, la depreciación del dólar (una reducción de e) reduce el precio del petróleo para los extranjeros en relación con sus materias primas tasadas en moneda extranjera, aumentando con ello el poder adquisitivo y la demanda del petróleo de los consumidores extranjeros, lo que a su vez, empuja hacia arriba el precio del crudo del petróleo en dólares. Desde otro punto de vista, la ecuación (2.43) sostiene, como la condición de arbitraje garantiza, que cuando el valor del dólar cae el precio del petróleo en dólares se incrementa y/o el precio del petróleo en moneda extranjera cae. La teórica correlación negativa entre el dólar y el precio del petróleo que surge de la ecuación (2.43) ha sido corroborada por varios estudios empíricos. Bloomberg y Harris (1995), Sadorsky (2000), Indjehagopian et al. (2000), Youssefi y Wirjanto (2004), Krichene (2005), Zhang et al. (2008) y Akram (2009) encontraron apoyo empírico para la hipótesis que los movimientos de las tasas de cambio afectan negativamente a los precios del petróleo.

Por otro lado, las explicaciones teóricas sobre el impacto de los precios del petróleo sobre la tasa de cambio del dólar fueron proporcionados desde el principio por Golub (1983) y Krugman (1983). Asumiendo que la demanda de petróleo en los países importadores del mismo es inelástica, Golub argumenta que las subidas de los precios del petróleo tienen un efecto en la distribución de

la riqueza ya que aumenta el superávit de los países exportadores de petróleo y el déficit de la cuenta corriente de los países importadores de petróleo; por lo tanto reducen el gasto en petróleo y la demanda del dólar. Krugman desarrolló un modelo teórico con especulación en el cual el efecto de un aumento en los precios del petróleo sobre las tasas de cambio puede ser positivo o negativo en función de los beneficios relativos del movimiento del precio del petróleo sobre la balanza de pagos de los exportadores e importadores de petróleo. En el corto plazo, un aumento del precio del petróleo dará lugar a la apreciación del dólar, pero a la larga, dará lugar a la depreciación del dólar.

El impacto de los precios del petróleo sobre las tasas de cambio también puede ser explicada sobre la base de la ecuación (2.43) para el precio de cualquier bien. Tomando una aproximación log-lineal de los índices de precio para consumidores en el país de origen y en los países extranjeros dada por:

$$p = (1 - \phi)p^T + \phi p^N, \quad (2.44)$$

$$p^* = (1 - \phi^*)p^{T^*} + \phi^* p^{N^*}, \quad (2.45)$$

donde $p^T(p^{T^*})$ y $p^N(p^{N^*})$ son los precios de los bienes negociables y no negociables en los mercados internacionales para el país de origen (extranjero), respectivamente, y $\phi(\phi^*)$ es el peso que corresponde al gasto compartido de los bienes no negociables en el país de origen (extranjero), el índice de la tasa de cambio nominal de la ecuación (2.43) y la ecuación (2.44)-(2.47) se puede expresar de la siguiente manera:

$$e = (p^N - p^{N^*}) + (1 - \phi^*)(p^{T^*} - p^{N^*}) - (1 - \phi)(p^T - p^N). \quad (2.46)$$

Por lo tanto, asumiendo que $\phi \simeq \phi^*$ y el efecto de empuje de los costos de un cambio de precio del petróleo en bienes no negociables es similar en los países de origen y extranjeros, el efecto de un aumento en el precio del petróleo sobre las tasas de cambio depende de su impacto en el precio relativo de los bienes negociables en el país de origen con respecto a los precios relativos de los bienes negociables en el país extranjero. Por lo tanto, si el país de origen es más dependiente del petróleo importado, un aumento en el precio del petróleo podría aumentar los precios relativos de los bienes negociables en el país de origen en mayor proporción que en el país extranjero, causando así una depreciación en la moneda local. De lo contrario, el aumento del precio del petróleo hace que la moneda local se aprecie.

Un enfoque alternativo para el efecto de los precios del petróleo sobre las tasas de cambio proviene de un modelo monetario de tasas de cambio. Asumiendo que la demanda de dinero, m , depende del nivel de precios, p , el ingreso real, y , y la tasa de interés, i , y que el efecto de estas variables sobre la demanda de dinero es similar en el país de origen y en el país extranjero, entonces a partir de la ecuación (2.43), para los precios de cualquier bien y la condición de paridad de los tipos de interés, se puede expresar la tasa de cambio nominal como:

$$e = (m^* - m) + (y - y^*). \quad (2.47)$$

La ecuación (2.47) es un modelo monetario de largo plazo para la determinación de la tasa de cambio que podría acomodar la influencia de los precios del petróleo sobre la tasa de cambio considerando los precios del petróleo como una variable explicativa adicional (ver, e.g., Lizardo y Mollick, 2010).

La evidencia empírica del papel de los precios del petróleo en la explicación de la tasa de cambio real ha sido reportada por Amano y Norden (1998), Camarero y Tamarit (2002), Akram (2004), Chen y Chen (2007), Cifarelli y Paladino (2010) y Lizardo y Mollick (2010), mientras que Huang y Guo (2007) encontró poca evidencia con relación al efecto de los precios del petróleo sobre la tasa de cambio real de China.

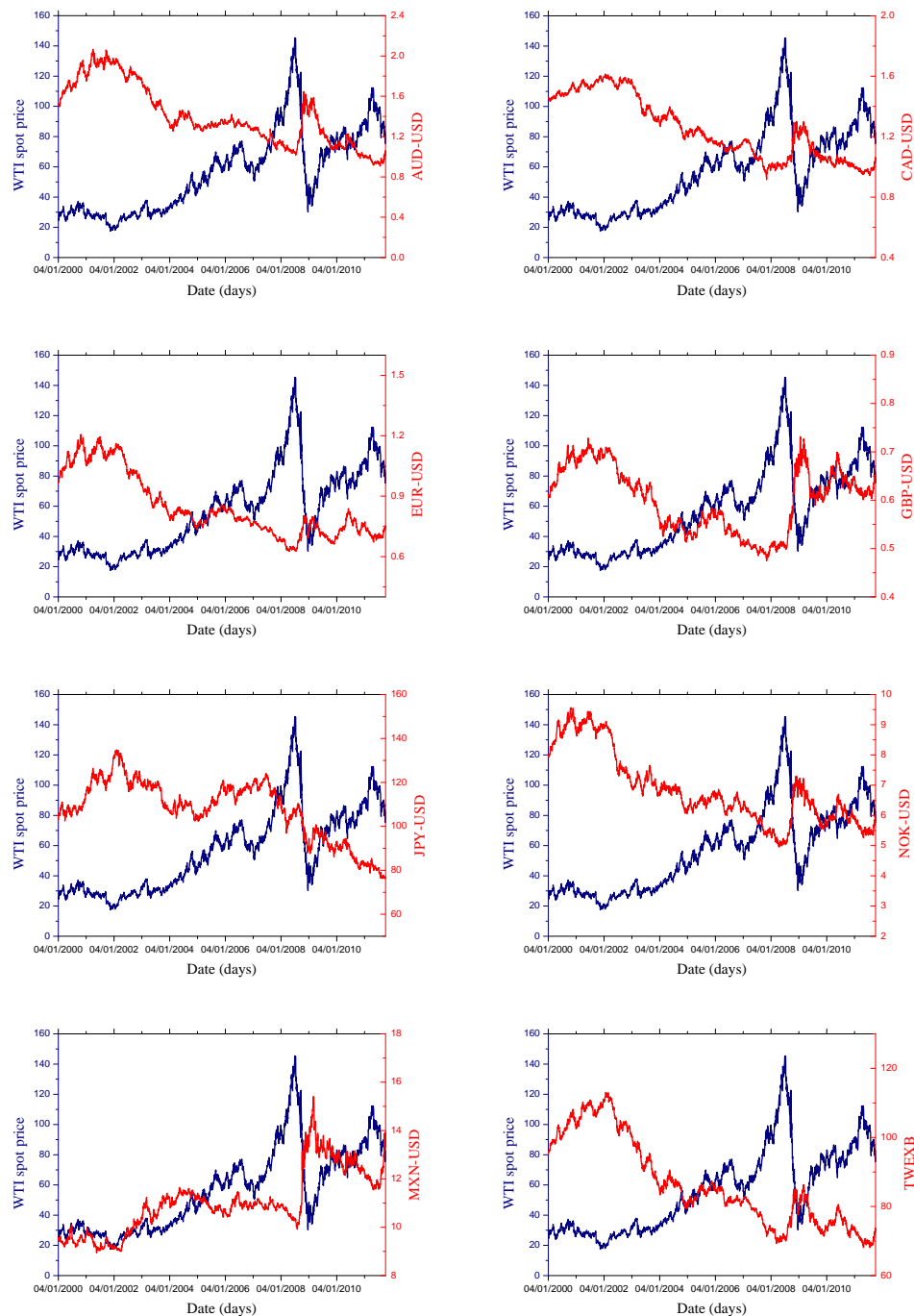
La mayor parte de la literatura empírica sobre la dependencia entre el petróleo y la tasa de cambio proporciona evidencia en el dominio del tiempo sobre la dependencia negativa a corto y a largo plazo, y también aporta datos sobre el movimiento conjunto entre el petróleo y la tasa de cambio (?), pero la evidencia sobre los dominios del tiempo y de la frecuencia no ha sido, hasta ahora, proporcionada. En el contexto de las explicaciones teóricas anteriores, una cuestión interesante es que la relación entre el petróleo y el dólar cambia en el tiempo y a través de diferentes escalas de tiempo. El hecho de que el proceso de ajuste de precios no puede ser instantáneo y que el petróleo puede ser considerado como una inversión atractiva para los inversores con horizontes diferentes de inversión exige una comprensión más profunda de la inter-dependencia entre el petróleo y el dólar en el dominio del tiempo, así como en el dominio de la frecuencia. El análisis wavelet considera estas dos dimensiones.

2.5.4. Datos

La inter-dependencia del petróleo y la tasa de cambio del dólar fue investigada considerando datos diarios desde el 04 de enero del año 2000 al 7 de octubre del año 2011. Hemos utilizado los precios del crudo en dólares por barril para el WTI, dado que el WTI se utiliza como referencia para determinar el precio de otros crudos livianos en los Estados Unidos y está estrechamente relacionado con otros mercados del crudo del petróleo, como los de Brent, Maya, Dubái, etc. (ver, [Reboredo, 2011](#)). Los datos de la tasa de cambio (en moneda extranjera por unidad de dólar, es decir, un aumento en las tasas de cambio conduce a una apreciación del dólar) se refiere a los países de la zona Euro (EUR) (Austria, Bélgica / Luxemburgo, Chipre, Finlandia, Francia, Alemania, Grecia, Irlanda, Italia, Malta, Países Bajos, Portugal, Eslovenia, Eslovaquia y España), Australia (AUD), Canadá (CAD), Japón(JPY), México (MXN), Noruega (NOK) y el Reino Unido (GBP). Estos países representan las economías desarrolladas y emergentes, los países exportadores e importadores netos de petróleo y representan la mayor parte del comercio en los mercados internacionales de los tipos de cambio. En cuanto a los efectos de los precios del petróleo sobre las tasas de cambio, y viceversa, algunos de estos países ya han sido investigados empíricamente (ver, e.g., [Akram, 2004](#); [Lizardo y Mollick, 2010](#); [Zhang et al., 2008](#)). También se consideraron el *US Federal Reserve's Broad Trade Weighted Exchange Index* (TWEXB) para examinar la dependencia entre los precios del petróleo y la tasa de cambio agregado. Se han descargado datos de los precios del petróleo de la página web oficial del *Energy Information Administration* (EIA) (<http://www.eia.doe.gov>) y los datos de la tasa de cambio en la web de la Bank of England (<http://www.bankofengland.co.uk>) y del Federal Reserve Bank of Saint Louis (<http://www.frbstlouis.com>).

Las dinámicas del precio del petróleo y de la tasa de cambio para las diferentes divisas se ilustran en la figura 2.27, que muestra oscilaciones coincidentes en los precios del crudo de petróleo y de la tasa de cambio del dólar: ambos tienden a moverse en direcciones opuestas, incluso tras la crisis financiera. Los movimientos del precio del petróleo se limitaron razonablemente desde principios de 2000 a abril de 2003, pero comenzaron a aumentar gradualmente a partir de entonces (con algunas excepciones, como el último trimestre de 2006), alcanzando un pico de 145 dólares en julio de 2008. En el mismo período, la tasa de cambio del dólar con diferentes divisas mostró una tendencia similar, aunque la intensidad varió en función a la moneda. No obstante, con la intensificación de la crisis financiera mundial, los precios del petróleo cayeron a alrededor de 30 dólares en diciembre de 2008 y poco a poco volvieron a au-

Figura 2.27: Evolución temporal del precio del petróleo WTI y las principales tasas de cambio para el período del 4 de Enero del 2000 al 7 de Octubre de 2011.



mentar hasta 80 dólares a mediados de junio de 2010. Las tasas de cambio y los precios del petróleo mostraron un co-movimiento de mayor intensidad que en el período anterior, con la excepción de los precios del petróleo y la moneda japonesa (ver Fig. 2.27), con lo que proporcionó cierta evidencia de un cambio estructural en la dependencia de la tasa de cambio y del precio del petróleo. De

hecho, para una ventana de datos de 300 observaciones diarias, hubo una evolución en la correlación de Pearson para los precios del petróleo y las tasas de cambio a lo largo del período de muestreo, esto señala un cambio en la relación entre los precios del petróleo y las tasas de cambio con la intensificación de la crisis financiera mundial. Utilizando el estadístico F desarrollado por Andrews (1993), Andrews y Ploberger (1994) y Hansen (1997) para la hipótesis nula de no cambio en la dependencia lineal entre los datos del precio del petróleo y de las tasas de cambio, se ha identificado endógenamente un punto de cambio estructural en la dependencia lineal entre julio de 2008 y septiembre de 2008.

Por lo tanto, se examinaron los datos de dos períodos, uno antes y otro después del 15 de julio de 2008, el punto en el que los precios del petróleo comenzaron a disminuir considerablemente después de una trayectoria de significativo aumento, poco antes que la crisis llegara a su etapa más crítica en septiembre de 2008. De esta manera, se pudo estudiar la dependencia real entre los precios del petróleo y las tasas de cambio y el impacto de la crisis financiera sobre esta dependencia. Para cada periodo se calculó la rentabilidad del precio del crudo del petróleo y la tasa de cambio como la diferencia entre el logaritmo del precio actual y del precio retardado por el periodo anterior.

La tabla 2.3 muestra las estadísticas descriptivas para la rentabilidad del petróleo y la tasa de cambio para las muestras representativas de los períodos anterior y posterior al 15 de julio de 2008. Las rentabilidades medias fueron similares en todos los mercados y las desviaciones estándar correspondientes fueron mayores en un orden de diversas magnitudes. Puesto que las medias de la serie de rentabilidades fueron muy pequeñas en relación a las desviaciones estándar, se podría concluir que no hubo ninguna tendencia significativa en los datos. Las rentabilidades medias disminuyeron significativamente, excepto en Japón y Sudáfrica, y sobre todo para el petróleo, en el período posterior al 15 de julio de 2008, mientras que la volatilidad se incrementó en todos los casos, mostrando riesgos relativamente altos en el periodo posterior al 15 de julio de 2008. Además, la diferencia entre los valores máximos y mínimos muestra que los precios del crudo del petróleo y las tasas de cambio eran más volátiles en el período de crisis que en el período anterior a la misma. Los valores negativos del sesgo no fueron comunes a todas las tasas de cambio, aunque el valor disminuyó durante la crisis financiera para la mayoría de las tasas de cambio consideradas. Todas las rentabilidades muestran curtosis excesiva que fue en general mayor en el período de crisis, lo que implica colas más gruesas para la rentabilidad. La prueba de Jarque-Bera para la normalidad de la distribución incondicional rechazó la normalidad de la distribución incondicional

Cuadro 2.3: Estadística descriptiva para las rentabilidades diarias del petróleo WTI y las tasas de cambio durante el período del 4 de Enero de 2000 hasta el 7 de Octubre de 2011.

| | Media (%) | Desv.est. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | ARCH-LM ¹ | LB ¹ | Corr.con Petróleo |
|--|--------------|-------------------|-------|-------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| Panel A: 4 Enero 2000 al 15 Julio 2008 | | | | | | | | |
| WTI | 0.081 | 2.42 | -0.52 | 6.82 | 0.00 | 0.01 | 0.15 | — |
| AUD | -0.019 | 0.71 | 0.59 | 6.91 | 0.00 | 0.00 | 0.18 | -0.11 |
| CAD | -0.017 | 0.51 | 0.05 | 4.20 | 0.00 | 0.00 | 0.16 | -0.12 |
| EUR | -0.021 | 0.60 | -0.04 | 4.04 | 0.00 | 0.01 | 0.19 | -0.08 |
| GBP | -0.009 | 0.52 | 0.06 | 3.63 | 0.00 | 0.00 | 0.21 | -0.07 |
| JPY | -0.000 | 0.61 | -0.32 | 4.64 | 0.00 | 0.01 | 0.19 | -0.06 |
| NOK | -0.021 | 0.65 | 0.13 | 3.79 | 0.00 | 0.00 | 0.22 | -0.12 |
| MXN | 0.004 | 0.46 | 0.11 | 5.49 | 0.00 | 0.00 | 0.18 | -0.03 |
| TWEXB | -0.014 | 0.42 | 0.12 | 3.57 | 0.00 | 0.00 | 0.19 | -0.12 |
| | Media (%) | Desv.Estd. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | ARCH-LM ¹ | LB ¹ | Corr.con Petróleo |
| Panel B: 16 Julio 2008 al 7 Octubre 2011 | | | | | | | | |
| WTI | -0.065 | 3.21 | 0.25 | 7.60 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | — |
| AUD | -0.000 | 1.32 | 0.79 | 11.34 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.45 |
| CAD | 0.004 | 0.90 | -0.13 | 6.34 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.45 |
| EUR | 0.021 | 0.83 | -0.14 | 5.56 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.32 |
| GBP | 0.031 | 0.87 | 0.35 | 8.45 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.30 |
| JPY | -0.038 | 0.81 | -0.36 | 7.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.22 |
| NOK | 0.017 | 1.13 | -0.13 | 6.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.44 |
| MXN | 0.031 | 0.98 | 0.66 | 13.33 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.37 |
| TWEXB | 0.004 | 0.63 | -0.54 | 6.60 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.39 |

¹Un p-values < 0.05 indican el rechazo de la hipótesis nula para los tests estadísticos asociados al nivel de 5 %.

Nota: Datos diarios para el período del 4 de Enero del 2000 al 07 de Octubre de 2011. Los datos fueron divididos en dos muestras: (a) Panel A: 4 de Enero del 2000 al 15 de Julio 2008 (antes de la crisis financiera) y (b) Panel B: 16 Julio 2008 al 07 de octubre del 2011 (después del inicio de la crisis financiera). La tabla informa las estadísticas básicas para las series de rentabilidades, incluyendo media, desviación standard (Desv.est.), asimetría (Asim.), y curtosis (Curt.). ARCH se refiere al teste estadístico para la heterosedasticidad condicional de orden 10. LB se refiere al estadístico Ljung Box para autocorrelación de orden 10. JB se refiere al estadístico Jarque-Bera para detectar normalidad. Corr. se refiere al coeficiente de correlación.

para todas las series en ambos períodos. Además, los valores estadísticos de Ljung-Box de incorrelación hasta la posición 36 en la rentabilidad sugieren la inexistencia de una correlación serial para la mayoría de las rentabilidades de la tasa de cambio en el período anterior al 15 de julio de 2008, a pesar de que la correlación se hizo extensamente común en el período de crisis. Por último, el test del multiplicador de Lagrange para la heterocedasticidad condicional auto-regresiva (ARCH-LM) para la rentabilidad indicó la existencia de efectos ARCH en todas las series de rentabilidades en ambos períodos.

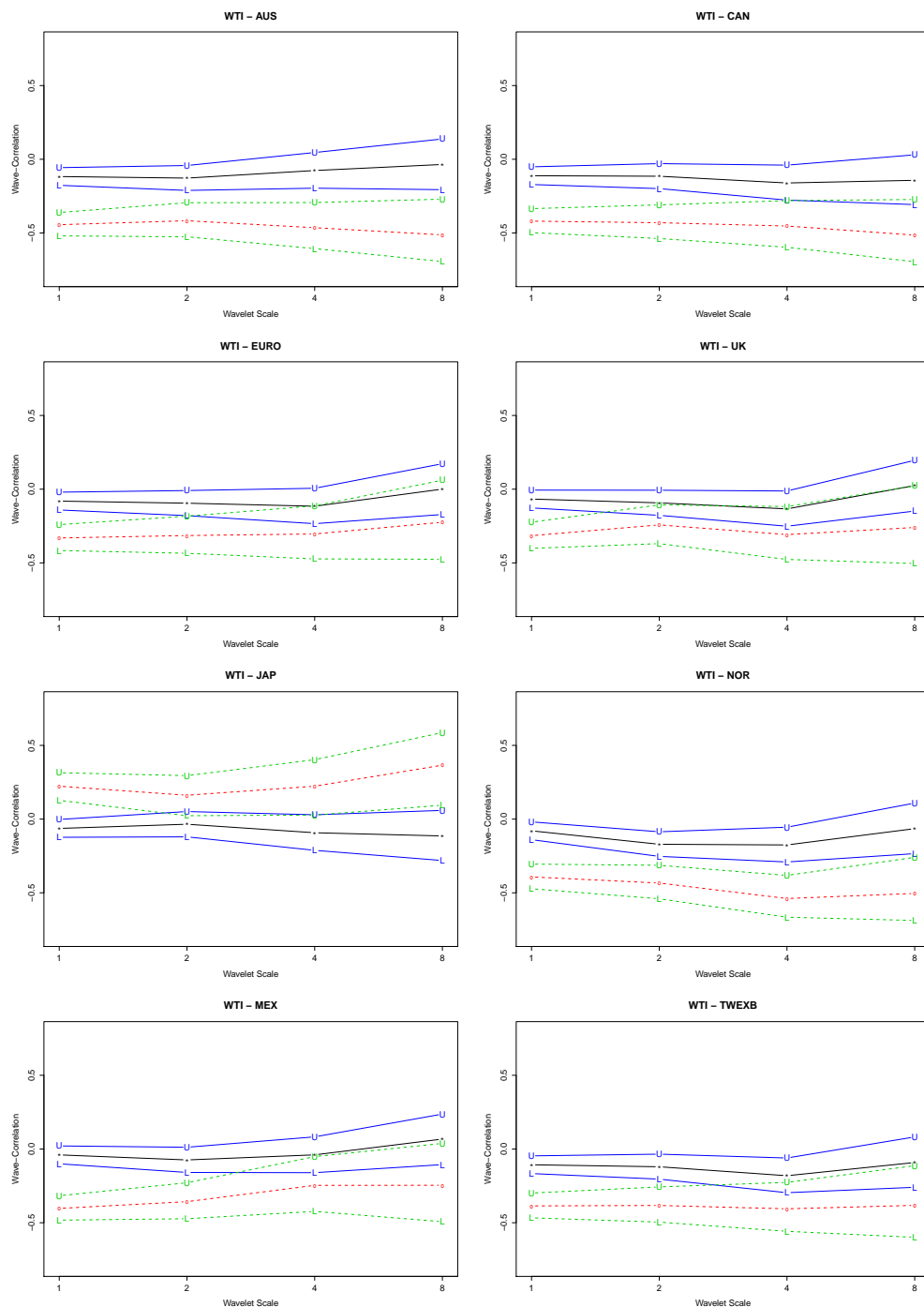
2.5.5. Resultados

Se aplicó la técnica de descomposición wavelet a la rentabilidad del petróleo y a las tasas de cambio utilizando los coeficientes wavelet para los niveles 1 al 4 (de una base diaria a una mensual). A continuación, se calculó la correlación wavelet $\tilde{\rho}_{XY}(\lambda_j)$ para cada par de variables compuestas (los precios del petróleo y las tasas de cambio para diferentes monedas) y para cada uno de los dos períodos de muestreo considerados. Los resultados para la correlación de los precios WTI y las tasas de cambio para los diferentes niveles de resolución se muestran en la Figura 2.28. La línea continua corresponde al coeficiente de la correlación de wavelet para el periodo anterior al 15 de julio de 2008 (antes de la crisis), mientras que la línea discontinua indica el coeficiente de la correlación wavelet para el periodo posterior al 15 de julio de 2008 (la crisis). Las líneas indicadas en U y L representan los límites superior e inferior para el intervalo de confianza del 95 %.

Las pruebas de la correlación wavelet ofrecen dos patrones diferentes de dependencia de la tasa de cambio y del precio del petróleo para los dos períodos estudiados: (a) no hubo dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio en el período anterior a la crisis, con correlaciones cercanas a cero para la escala de tiempo menor y correlaciones no significativas para las mayores escalas de tiempo; y (b) hubo una dependencia negativa entre los precios del petróleo y las tasas de cambio para todas las escalas de tiempo en el periodo posterior al 15 de julio de 2008. El descenso significativo en la correlación wavelet en el período de la crisis para todas las escalas de tiempo nos permitió rechazar la hipótesis nula de la ecuación (3.29), lo que apoya el argumento del contagio financiero y la inter-dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio del dólar con el advenimiento de la crisis financiera. Este resultado es consistente con la evidencia empírica de co-movimiento entre el petróleo y las tasas de cambio suministrado por las funciones de cópula y reportados en [Reboredo \(2012\)](#).

Dado que la correlación no proporciona información sobre los efectos retardados del precio del petróleo sobre las tasas de cambio o viceversa (según la hipótesis de *underreaction*), se utilizó la correlación cruzada wavelet entre los precios del petróleo y las tasas de cambio para poner a prueba esta hipótesis para las diferentes escalas de tiempo. La correlación cruzada wavelet es también relevante a la pregunta de si los precios del petróleo conducen a las tasas de cambio, si las tasas de cambio conducen a los precios del petróleo, o si ambos se conducen mutuamente. Por medio de la computación de la correlación cruzada wavelet para las diferentes escalas de tiempo se pudo comprobar si había

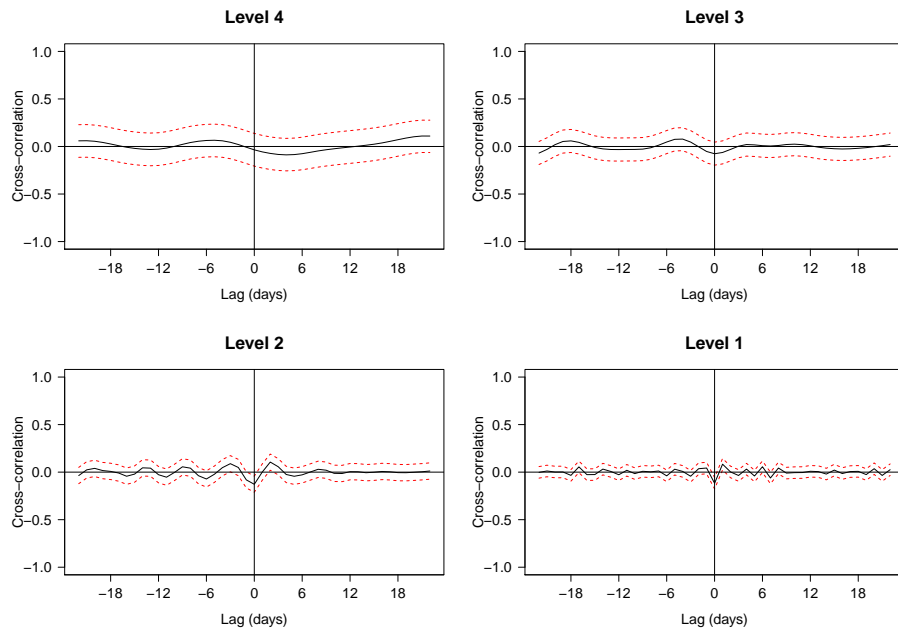
Figura 2.28: Correlación wavelets entre las rentabilidades del petróleo WTI y las tasas de cambio.



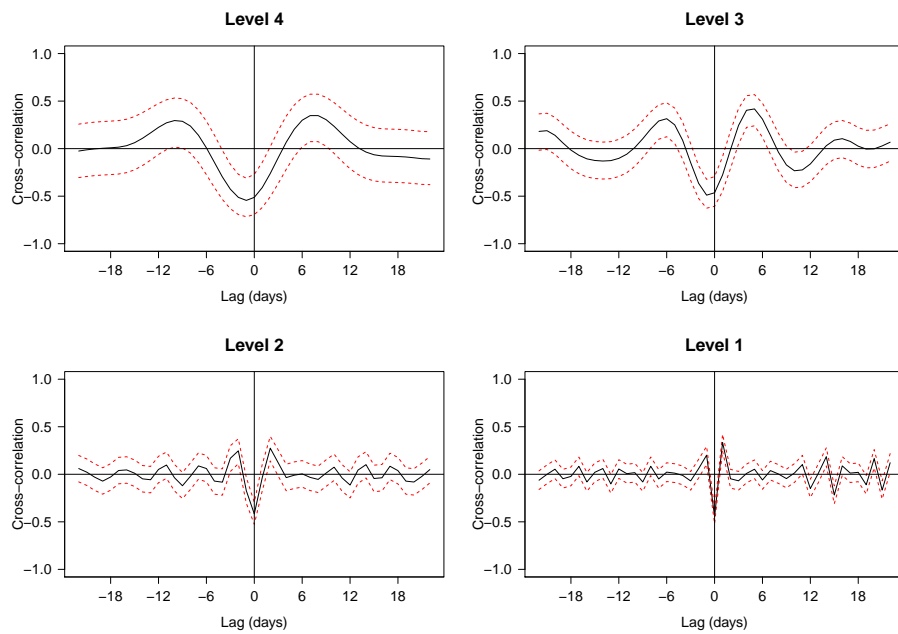
algún efecto terardado en la relación entre los precios del petróleo y las tasas de cambio. Las figuras 2.29 – 2.36 informan de la correlación cruzada wavelet entre los precios del petróleo en el tiempo t y las tasas de cambio en el tiempo $t - k$ para los cuatro niveles de resolución y los dos periodos de análisis. Dos principales conclusiones se pueden extraer. En primer lugar, para el período

anterior a la crisis, la correlación cruzada entre los precios del petróleo y las tasas de cambio fue nula para todos los niveles de resolución. Por lo tanto, la hipótesis de la ecuación (2.42) no puede ser rechazada, por lo que la hipótesis de *underreaction* u *overreaction* no se mantiene para el período anterior a la crisis. En segundo lugar y en relación al período de crisis, se observan significativas correlaciones cruzadas positivas y negativas tanto en el lado derecho como izquierdo de la gráfica: con el inicio de la crisis financiera no sólo había aumentado la inter-dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio, sino también los precios del petróleo y las tasas de cambio principalmente se dirigieron mutuamente y sobre todo lo hicieron para los niveles 3 y 4 (aunque con la excepción de las tasas de cambio del euro, el yen y el peso mexicano para el nivel 4). Estos efectos entre el petróleo y las tasas de cambio probablemente surgieron como una consecuencia del contagio financiero y el aumento de la inter-dependencia observados con el inicio de la crisis financiera. Por consiguiente, la hipótesis en la ecuación (2.42) se rechaza al nivel del 95 %, aunque no hay evidencia que apoye claramente la *underreaction* y *overreaction* a través de las tasas de cambio de los precios del petróleo, o viceversa; se encontraron valores estadísticamente positivos y negativos en los lados derecho e izquierdo de la gráfica, proporcionando evidencia, más bien de interacciones dinámicas de *lead* y *lag* complejas. En general, la evidencia de la correlación cruzada wavelet para los diferentes niveles de resolución rechaza la hipótesis de *underreaction-overreaction* para ambos períodos del muestreo.

Figura 2.29: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio AUD-USD.

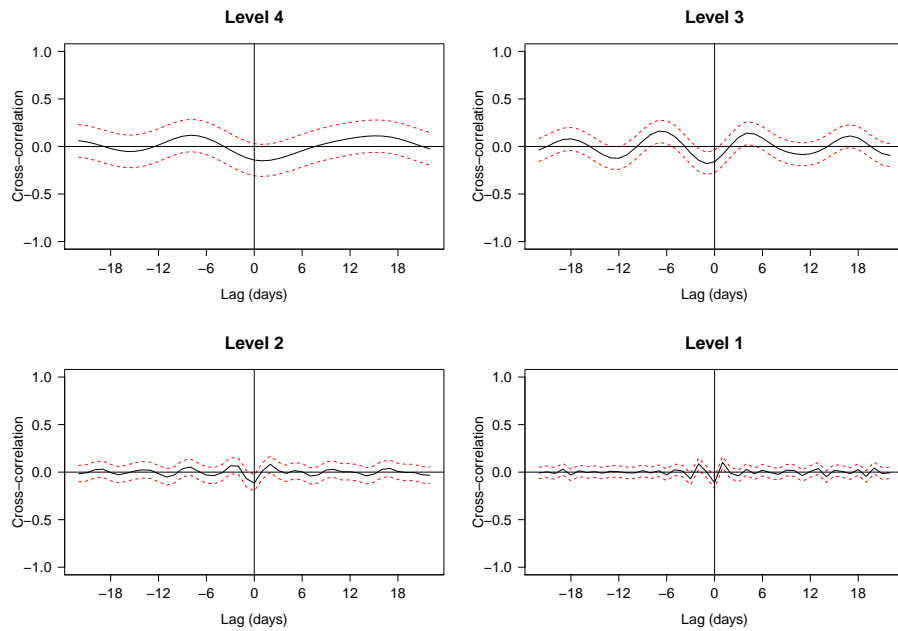


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

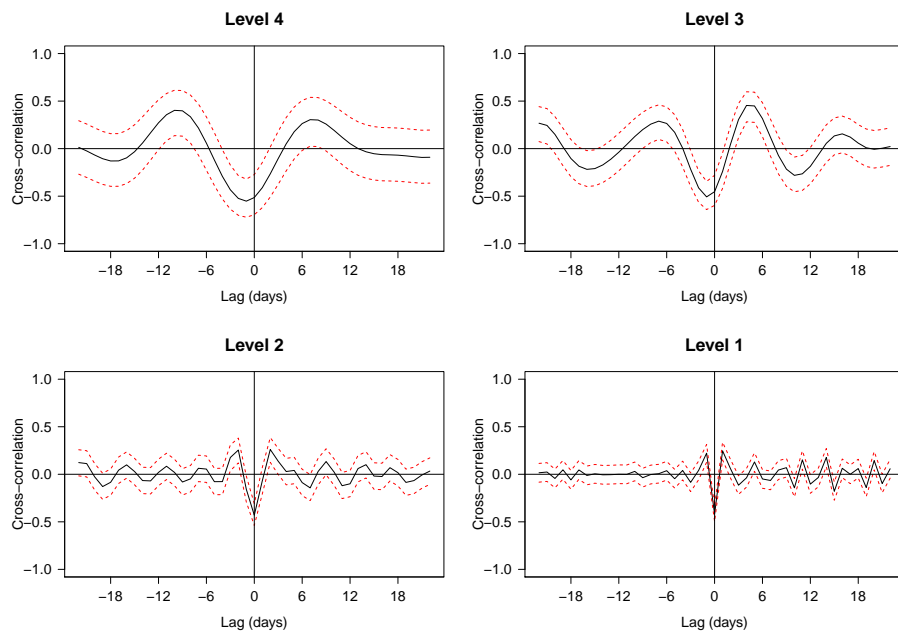


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.30: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio CAD-USD.

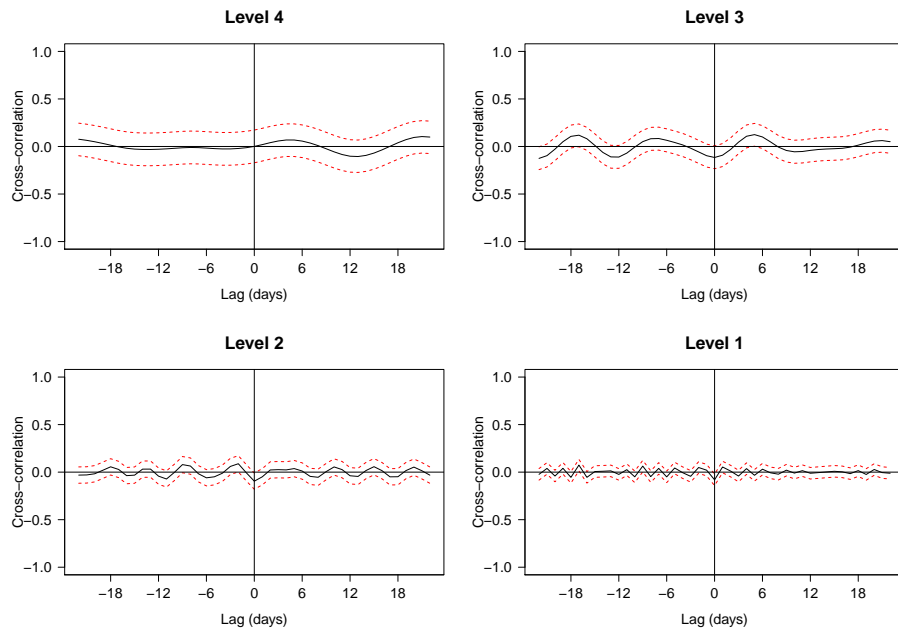


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

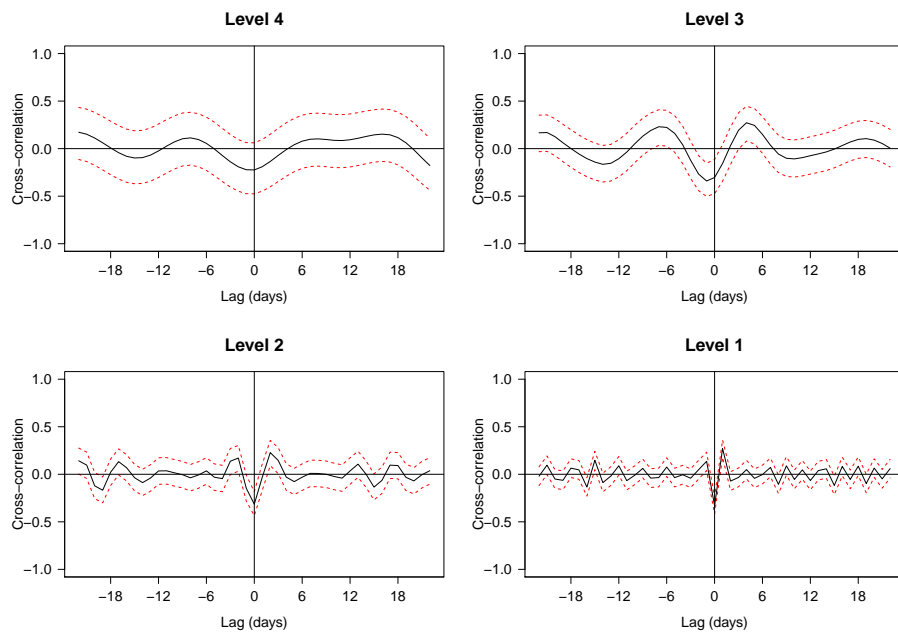


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.31: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio EUR-USD.

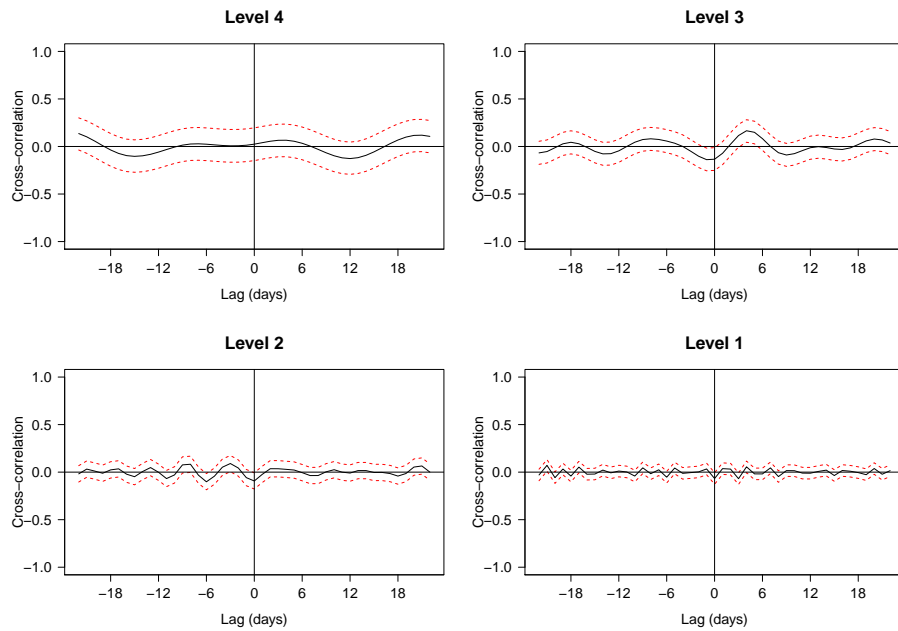


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

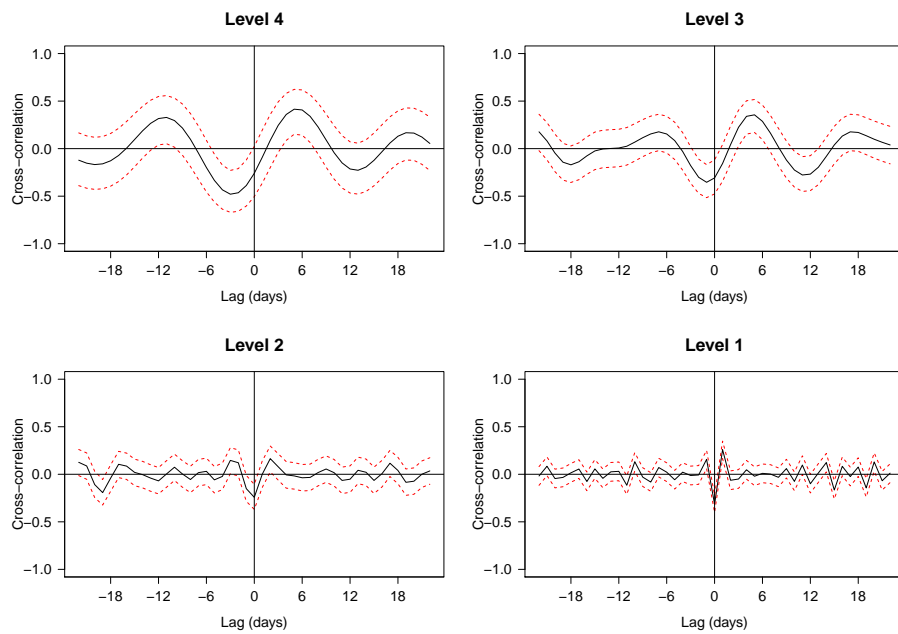


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.32: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio GBP-USD.

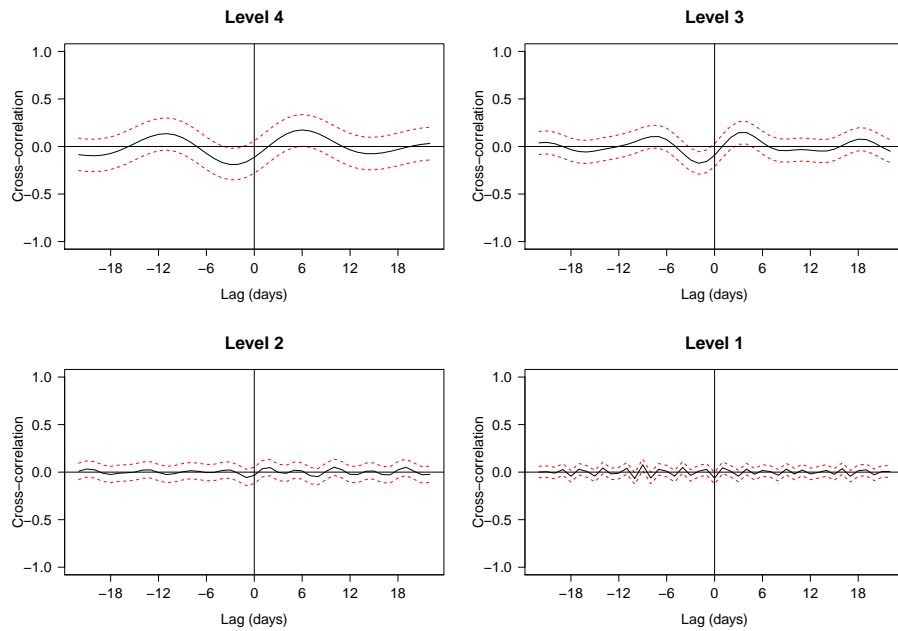


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

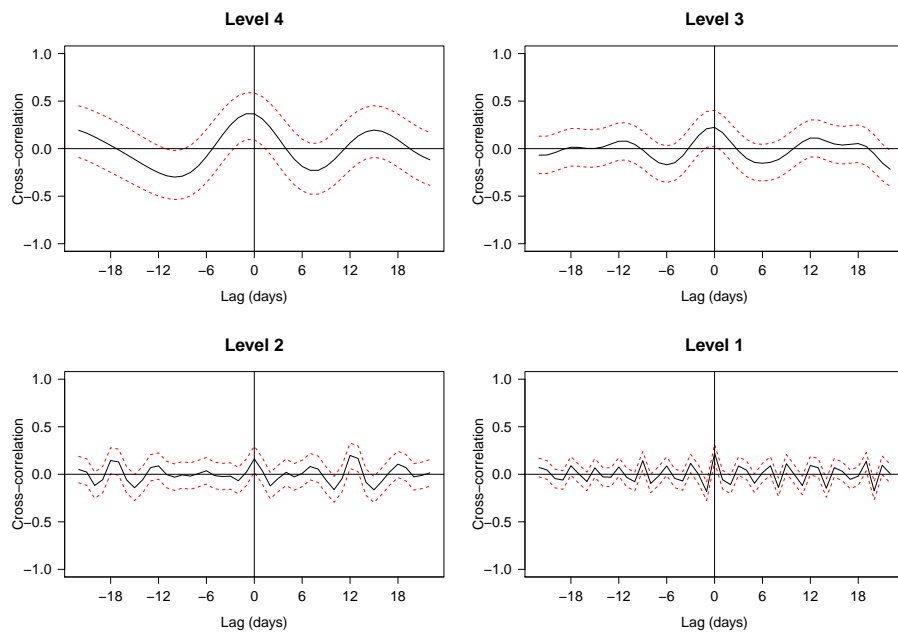


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.33: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio JPY-USD.

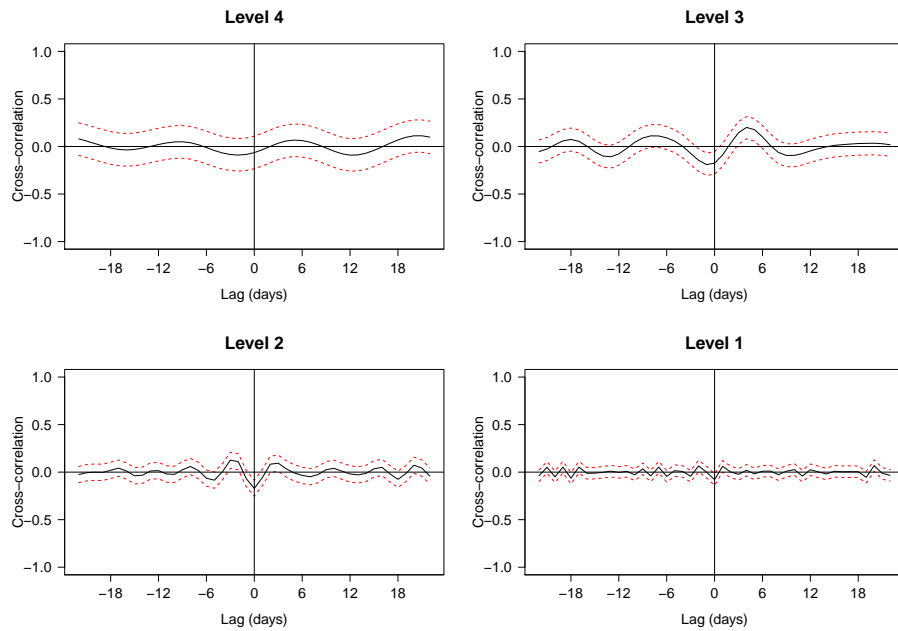


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

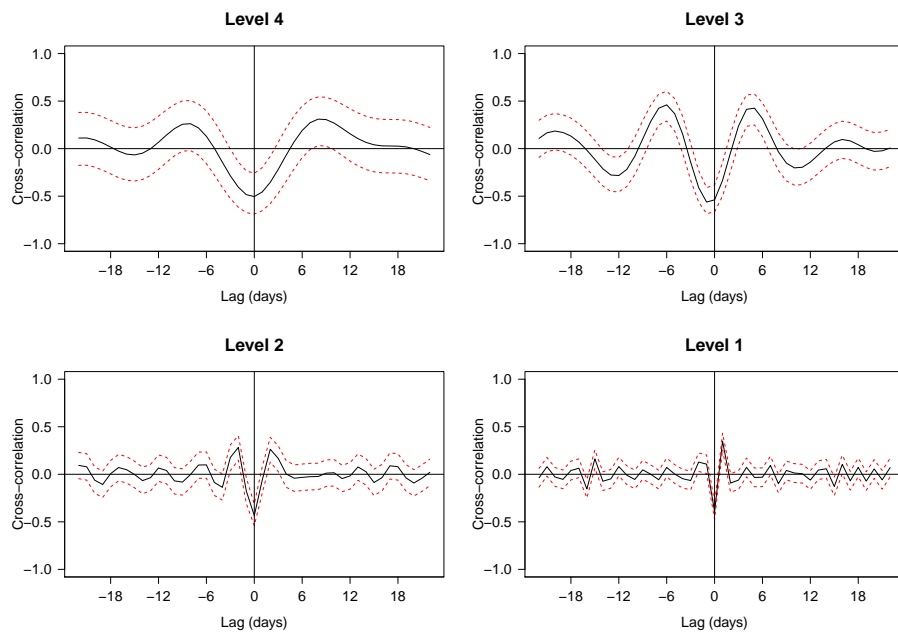


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.34: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio NOK-USD.

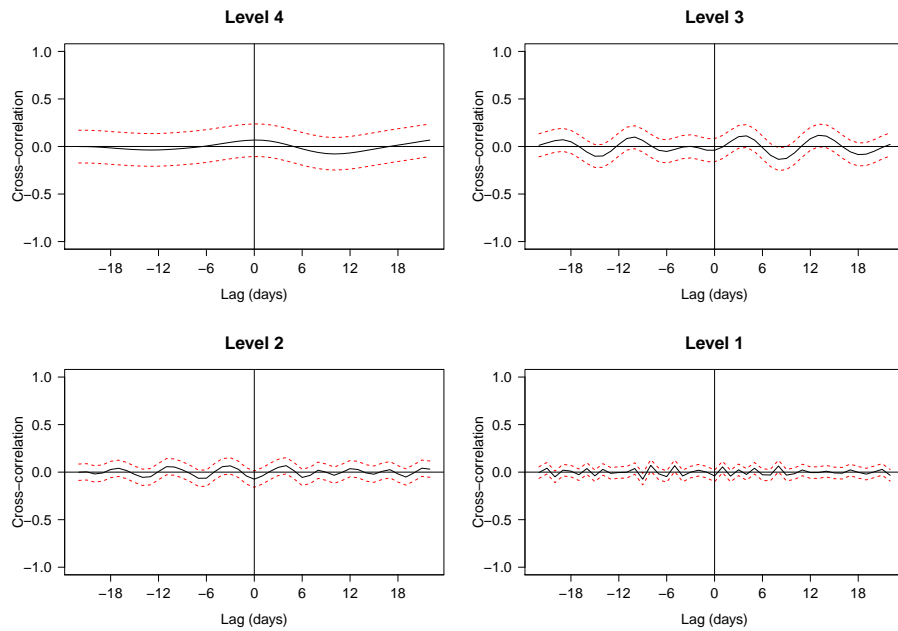


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

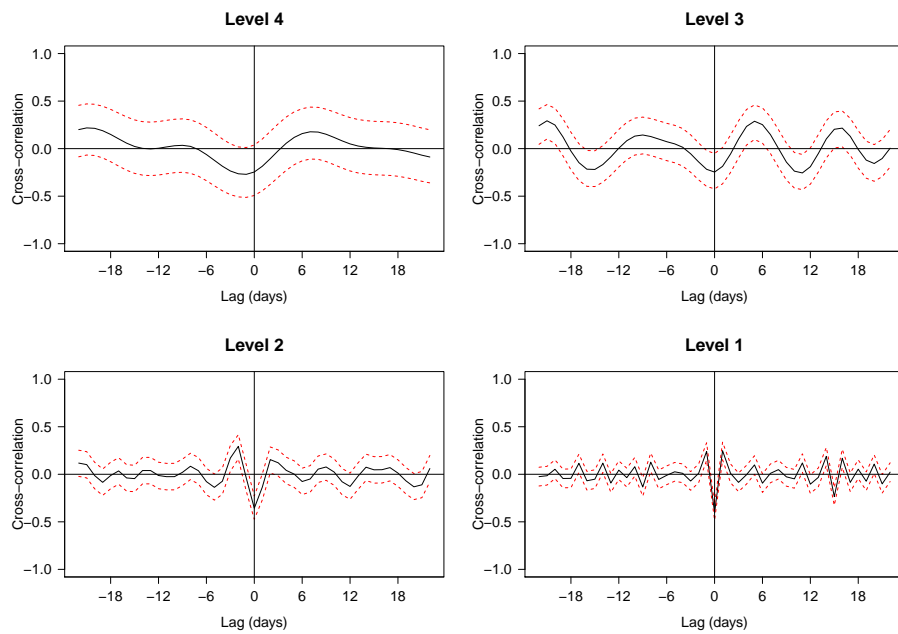


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.35: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio MXN-USD.

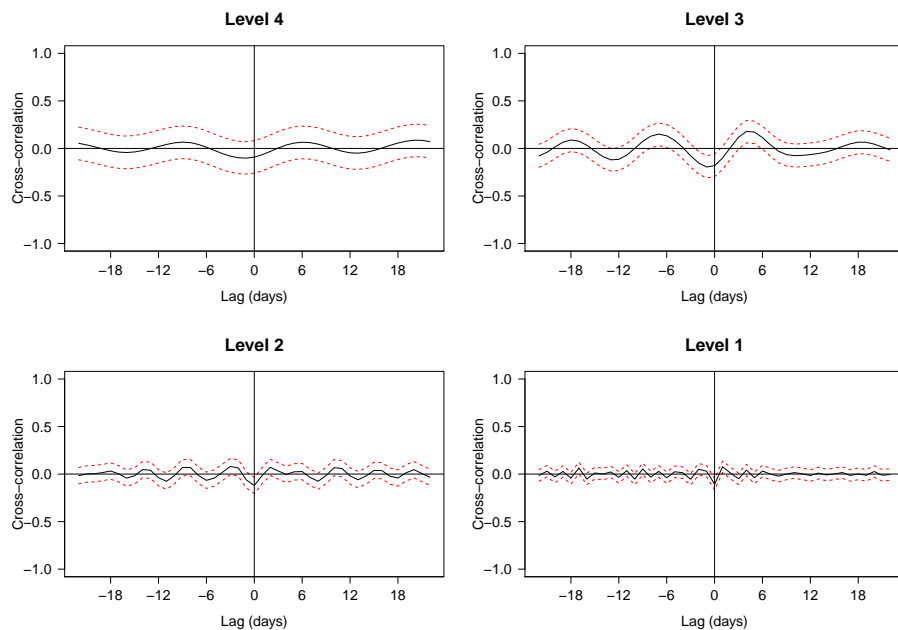


Panel A: Junio 2000 a Julio 2008

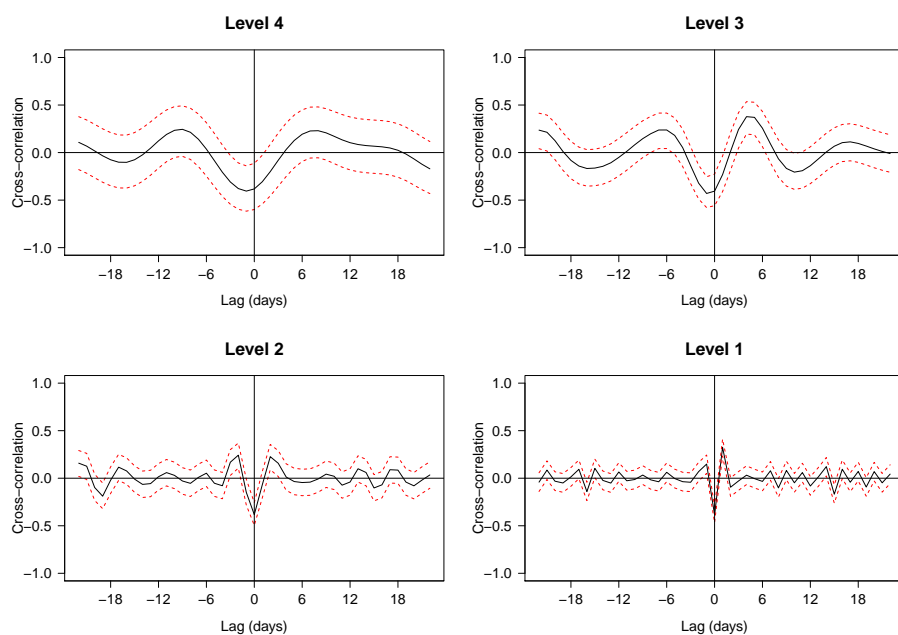


Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

Figura 2.36: Cross-correlación wavelet entre el petróleo WTI y la tasa de cambio TWEXB-USD.



Panel A: Junio 2000 a Julio 2008



Panel B: Julio 2008 a Octubre 2011

2.5.6. Discusión

Los resultados empíricos sobre la inter-dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio del dólar tienen implicaciones políticas y financieras para reguladores, traders e investigadores. Primeramente, de acuerdo

con nuestros resultados, el aumento exponencial de los precios del petróleo hasta mediados de 2008 no puede explicarse sobre la base de la depreciación del dólar. Por el contrario, se deben buscar explicaciones que empujan al alza los precios del petróleo en la demanda intrínseca y el comportamiento de suministro en los mercados internacionales del petróleo. Sin embargo, con el inicio de la crisis financiera, la evidencia de inter-dependencia con el dólar indica que este ha desempeñado un papel activo.

La evidencia empírica indica también que el papel de la política monetaria en controlar los efectos inflacionarios del petróleo deben ser variables con el tiempo. El efecto inflacionario de un shock positivo del precio del petróleo puede ser parcialmente compensado por la depreciación de la moneda extranjera si las tasas del petróleo y del cambio son dependientes. Nuestros resultados indican que, en el período comprendido entre 2000 y mediados de 2008, los países no americanos importadores de petróleo que experimentaban presiones inflacionarias derivadas del precio del petróleo podrían de forma activa haber utilizado la política monetaria para controlar esas presiones, ya que no podían ser parcialmente contrarrestados por la depreciación del dólar. En el período de la crisis financiera, la evidencia de la dependencia del índice de precios del petróleo y el cambio de divisas para diferentes escalas de tiempo sugiere que el uso de la política monetaria para controlar las presiones inflacionarias del petróleo podrían ser más pasivas, dado que los efectos inflacionarios serían parcialmente compensados por la depreciación de la moneda extranjera.

La dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio del dólar también tiene implicaciones para la política fiscal de los países exportadores de petróleo (ver, e.g., [Anshasy y Bradley, 2011](#); [Bollino, 2007](#); [Chemingui y Roa, 2008](#); [Steigum y Thøgersen, 1995](#)) con el objetivo de aislar los gastos del gobierno de la volatilidad del precio del petróleo. Nuestros resultados con respecto a la dependencia antes de mediados de 2008 indican que el gasto del gobierno se hubiera expuesto a los ingresos provenientes del petróleo, dado que la volatilidad del precio no pudo ser diversificada por los movimientos del dólar, por lo que los productores de petróleo podrían haber utilizado los fondos soberanos de inversión para este propósito. Sin embargo, el aumento en la dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio con el inicio de la crisis significó que un shock positivo del precio del petróleo podría ser parcialmente compensado por la depreciación del dólar, y viceversa, por lo que la dependencia juega un papel de diversificación similar al desempeñado por los fondos soberanos.

La inter-dependencia entre los mercados del petróleo y las tasas de cam-

bio tiene implicaciones para los países exportadores de petróleo que vincula sus monedas al dólar. El poder adquisitivo de esos países con respecto a los países importadores de petróleo incrementa (disminuye) cuando los precios del petróleo van aumentan (bajan) si los precios del petróleo (en dólares) no se mueven conjuntamente con las tasas de cambio. Por el contrario, la eficiencia de esta política sería más limitada, ya que algunos de los beneficios de un aumento en los precios del petróleo serán absorbidos por la depreciación del dólar, a pesar de que el efecto de la volatilidad de los precios del petróleo sobre las fluctuaciones del poder adquisitivo del petróleo se amortigua.

Las implicaciones de nuestros resultados sobre la dependencia variable en el tiempo también son importantes para la gestión de riesgo, ya que el riesgo del mercado al que se enfrentan los países importadores del petróleo (exportadores), desde los movimientos positivos del precio del petróleo, fue diferente para los dos períodos de muestra analizada. El efecto de diversificación de las tasas de cambio contra el aumento del precio del petróleo en el período de crisis ha sido mayor que en el período anterior a la crisis. Esta conclusión también se aplica a los inversores con posiciones en los activos de petróleo y del dólar. Es conveniente mencionar que en el periodo anterior a la crisis no hubo efecto *lead* y *lag* entre los precios del petróleo y las tasas de cambio, por lo que la construcción de las carteras dinámicas era más sencilla que en el período de crisis, cuando las complejas interacciones dinámicas entre los precios del petróleo y el dólar americano se produjeron, lo que sugiere un diseño dinámico de carteras más cuidadoso.

2.5.7. Consideraciones finales

En esta sección se analizó la dependencia de los precios del petróleo y las tasas de cambio usando wavelets, que identifican las diferencias y los cambios en la relación de precios del petróleo con la tasa de cambio para diferentes escalas de tiempo. Específicamente, la propiedad de descomposición de escala de tiempo que tienen los wavelets es útil en revelar el contagio y la interdependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio durante una crisis financiera, como el análisis de correlación aplicado sobre una base de escala a escala proporciona intervalos de confianza fiables para las correlaciones wavelet estimadas en los periodos anterior y posterior a la crisis. Además, utilizando la correlación cruzada wavelet se puede analizar los efectos *lead* y *lag* de los precios del petróleo sobre las tasas de cambio para diferentes escalas de tiempo y así contrastar la hipótesis de *underreaction-overreaction* del inversor sobre una base de escala a escala.

Nuestros hallazgos principales para un amplio conjunto de monedas (incluyendo aquellas para los países desarrollados y las economías emergentes, para las economías exportadoras e importadoras netas de petróleo y para los países focalizados en la inflación) y al referente WTI de los precios del crudo para el período que abarca desde el 4 de enero de 2000 hasta el 7 de octubre de 2011 puede resumirse como sigue. Primeramente, los cambios del precio del petróleo no tuvieron efectos sobre las tasas de cambio, o viceversa, en el período pre-crisis. En segundo lugar, había evidencia de contagio e inter-dependencia (negativa) entre los precios del petróleo y las tasas de cambio desde el inicio de la crisis financiera mundial. En tercer lugar, el análisis de correlación cruzada wavelet no arroja evidencia de *underreaction* u *overreaction* con respecto al petróleo y a las tasas de cambio en el período anterior a la crisis, sin embargo, con el inicio de la crisis financiera, los precios del petróleo lideraron a las tasas de cambio y viceversa para frecuencias más altas y, para frecuencias menores, los precios del petróleo y las tasas de cambio se condujeron entre sí de manera compleja, teniendo en cuenta que las correlaciones *lead* y *lag* tuvieron valores significativos tanto positivos como negativos.

Las implicaciones de nuestros hallazgos en relación a la peculiar inter-dependencia entre los precios del petróleo y las tasas de cambio son importantes para la gestión efectiva de la política fiscal en los países exportadores del petróleo, para las políticas monetarias dirigidas a controlar las presiones inflacionarias del petróleo, para la ganancia de poder adquisitivo por las economías emergentes exportadoras de petróleo con monedas vinculadas al dólar, para la gestión del riesgo de mercado de los países importadores y exportadores del petróleo frente a una crisis del petróleo y, por último, la gestión de riesgos y la fijación de precios de los activos relacionados con el petróleo.

Parte II

Aplicaciones del análisis de fluctuaciones sin tendencia

Capítulo 3

Análisis de fluctuaciones sin tendencias: DFA - DCCA

3.1. Introducción

Históricamente el movimiento Browniano (en adelante mB) y el movimiento Browniano fraccionario (en adelante mBf) son consideradas curvas estadísticamente autoafines (Bouchaud y Potters, 2000). El movimiento Browniano, también conocido como proceso de Wiener o *random walk*, recibió este nombre como consecuencia del trabajo del botánico Escocés Robert Brown, que en 1828 describió el movimiento errático de partículas de polen en un medio acuoso, haciendo observaciones mediante un microscópico. El movimiento de una partícula parece no seguir ningún patrón determinado. En algunas regiones del plano el trazo del movimiento parece ser más denso que en otras. Al aumentar la resolución del microscopio y el tiempo de observación en estas regiones, se puede apreciar que el trazo es semejante al visualizado con baja resolución y con tiempos de observación menores.

Físicamente, el movimiento Browniano es debido al constante bombardeo de una partícula de polen por moléculas del medio en que está suspendido, en este caso el agua. Una sola molécula de agua difícilmente tendría cantidad de movimiento suficiente para mover la partícula a una resolución visible al microscopio, pero cuando muchas moléculas, que se desplazan aproximadamente en la misma dirección, colisionan con la partícula, en tiempos próximos, el comportamiento del grano de polen cambia. Estos eventos están separados en el tiempo por lo que se llama tiempo de “colisión” (τ). El desplazamiento de la partícula en cada espacio de tiempo no es fijo, ya que dependerá del número de moléculas que colisionan con la partícula, de la dirección, del momento, etc. De esta forma la dirección y el tamaño de estos pasos, o intervalos de

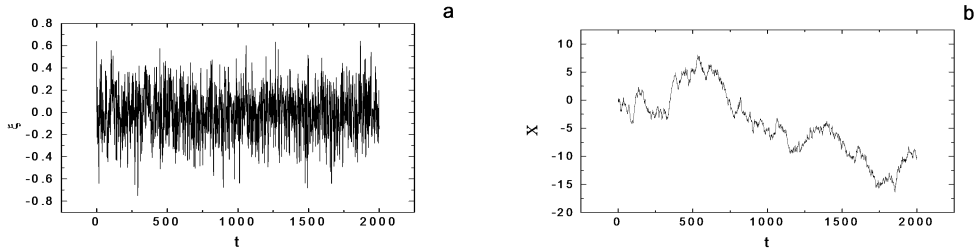
desplazamiento discretos (ξ), no están correlacionados.

En 1923 Wiener propuso un modelo matemático que presentaba un comportamiento similar al mB. Este modelo se basaba en una distribución de probabilidad Gaussiana, con media cero y varianza unitaria, de los pasos ξ . La Figura 3.1(a) representa una curva de $\xi(t)$, en una dimensión, también conocida como ruido Gaussiano. La suma de los sucesivos pasos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de la partícula durante n tiempos de colisión viene dada por:

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad (3.1)$$

donde X representa la posición de la partícula en el instante de tiempo t , que en el caso unidimensional sería la distancia al origen en función del tiempo. La función $X(t)$ en la Figura 3.1(b) se denomina generalmente “gráfico” del mB y puede ser obtenida mediante la proyección del camino mB en un sistema de dos coordenadas.

Figura 3.1: Simulación del mB unidimensional mediante la función de distribución Gaussiana de Wiener. (a) Pasos individuales de la partícula. (b) Posición de la partícula a lo largo del eje.



De acuerdo con Bouchaud y Potters (2000), en el límite, para intervalos de tiempo pequeños ($\tau \rightarrow 0$), la posición de la partícula X en la ecuación (3.1) se tornará en una función aleatoria, generalmente denominada como $B(t)$. Esta función es tal que para dos instantes de tiempo t_0 y t , con $t \geq t_0$, la varianza de los incrementos viene dada por:

$$\text{var}(B(t) - B(t_0)) \propto (t - t_0)^{2H}, \quad (3.2)$$

donde \propto significa proporcionalidad y H es el exponente de Hurst.

Para el movimiento Browniano ordinario el exponente H es igual a $1/2$. Wiener (1923) demostró que $B(t)$ es continuo pero no diferenciable en ningún punto. Eso implica que la partícula no tiene velocidad bien definida, o sea, que la curva $y = B(t)$ no tiene tangente en ningún punto. Gráficos del mB, como

el de la Figura 3.1(b), se encuadran en el grupo de las curvas estadísticamente autoafines.

Una generalización del mB es el movimiento Browniano fraccionario (mBf). En un mBf, el exponente H de la ecuación (3.2) puede variar entre $0 < H < 1$, generando un patrón de distribución distinto para cada valor de H . De la misma forma que el ruido Gaussiano está relacionado con el mB ordinario, hay un equivalente para el mBf que es el ruido Gaussiano fraccional.

El hecho de que este ruido esté compuesto por una distribución de pasos con valores de H diferentes de $1/2$, supone una característica importante para estos tipos de curvas. De acuerdo con Peng et al. (1994b), el exponente H aporta información sobre la persistencia o no de la dinámica generadora de la curva. En concreto para $H > 1/2$ se aprecia persistencia, de modo que un incremento positivo en el pasado aumenta la posibilidad de un incremento positivo en el futuro. Para $H < 1/2$ se aprecia antipersistencia, lo que indica que para un incremento positivo en el pasado, incrementos negativos en el futuro ocurrirán con mayor probabilidad. Para $H = 1/2$ el sistema, simplemente, no está correlacionado, como ocurre en el movimiento Browniano ordinario. Un buen ejemplo de esta relación de persistencia es el movimiento Browniano fraccionario, que se puede relacionar, a título de ilustración, con el movimiento de un borracho a lo largo de una línea. Si los pasos del borracho son persistentes un paso al frente será seguido probablemente, por otro en el mismo sentido, y este movimiento lo llevará siempre a distancias cada vez mayores del origen. Para pasos antipersistentes un paso hacia el frente, probablemente será seguido de uno hacia atrás, y esto lo mantendrá siempre próximo al origen.

3.2. Marco teórico

3.2.1. El movimiento browniano

Robert Brown, en 1828, fue el primero en observar que el movimiento errático microscópico del polen era de tipo físico, y no biológico, como se creía hasta entonces. Dedujo que a la escala de observación por el utilizada se presentaban fluctuaciones debido a la temperatura, de modo que las moléculas, macromoléculas, virus, partículas y otros componentes del mundo natural estaban todos en continuo movimiento, con colisiones aleatorias debidas a su energía térmica. Una partícula a una temperatura absoluta, T , tiene, como media,

una energía cinética de $\frac{3}{2}kT$ donde k es la constante de Boltzmann¹. En 1905, Einstein mostró que esta relación entre temperatura y energía es válida con independencia del tamaño de la partícula².

Si se considera el caso unidimensional, en que una “partícula” se mueve a lo largo de una línea saltando a pasos de longitud $+\xi$ o $-\xi$ a cada τ intervalo de tiempo, en términos físicos la variable ξ representa una longitud característica, como el tamaño de las partículas, y τ el tiempo microscópico o tiempo de colisión. Si el intervalo de tiempo es τ fijo, y la longitud del paso ξ es dado por una distribución Gaussiana:

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi F\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4F\tau}\right), \quad (3.3)$$

donde el parámetro F es el coeficiente de difusión. Las longitudes de paso ξ vienen definidas de forma que una secuencia de pasos $\{\xi\}$ constituye un conjunto de variables independientes, aleatorias y Gaussianas. Por tanto, la probabilidad de encontrar una longitud de paso ξ en el intervalo entre ξ y $\xi + d$ viene dada por $p(\xi, \tau)d\xi$, y la varianza del proceso esta definida por:

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2F\tau, \quad (3.4)$$

donde $\langle \rangle$ significa valor medio.

Al sumar la secuencia de n pasos $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ se obtiene la distancia de la partícula al origen:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad (3.5)$$

donde $t = n\tau$.

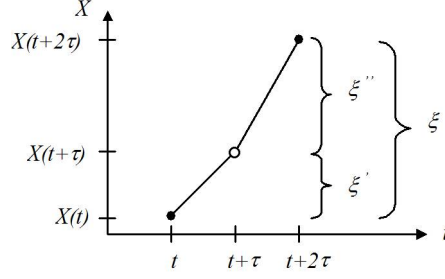
En el límite, para intervalos de tiempo pequeños las variables aleatorias X y ξ se convierten en funciones aleatorias $X(t)$ y $\xi(t)$. Las Figuras 3.1 presenta un ejemplo de las funciones $\xi(t)$ y $X(t)$. La Figura 3.2 presenta una ilustración del escalamiento de la variable X , de modo que se pasa de una escala de τ a otra 2τ . Una vez aplicada a X la función de escalamiento, el incremento ξ en la posición de la partícula es la suma de los dos incrementos independientes ξ' y ξ'' .

Dado que los dos incrementos usados para el escalamiento son estadística-

¹La constante de Boltzmann es la constante física que relaciona temperatura absoluta y energía.

² El movimiento de una “partícula Browniana” visto mediante un microscopio, consiste aparentemente en desplazamientos o saltos en direcciones aleatorias y con una longitud de paso que presenta un valor característico.

Figura 3.2: Ilustración del escalonamiento de la variable X para dos incrementos ξ' y ξ'' , en el intervalo de tiempo entre t y $t + 2\tau$.



mente independientes, la distribución de probabilidad total será el producto de las dos densidades de probabilidad:

$$p = (\xi'; \xi'', \tau) = p(\xi', \tau)p(\xi'', \tau). \quad (3.6)$$

Los dos incrementos, ξ' y ξ'' , deben sumarse para obtener el nuevo incremento ξ . Integrando sobre todas las combinaciones posibles de ξ' y ξ'' se obtiene la densidad de probabilidad para el incremento ξ , de acuerdo con la expresión:

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' p(\xi - \xi', \tau) p(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi F\tau}} \exp(-\xi^2/4F\tau). \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) representa una distribución Gaussiana con media nula y varianza $\langle \xi^2 \rangle = 2F\tau$, que comparada con la ecuación (3.4) esta aumentada por un factor igual a 2.

Esta demostración puede ser generalizada para intervalos de tiempo $b\tau$ entre observaciones, resultando:

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Fb\tau}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4Fb\tau}\right). \quad (3.8)$$

De forma que al calcular su varianza se obtiene:

$$\langle \xi^2 \rangle = 2Fh, \quad \text{con } h = b\tau. \quad (3.9)$$

Una expresión más conveniente para (3.9) es:

$$\langle [X(t+h) - X(t)]^2 \rangle = 2Fh, \quad (3.10)$$

lo que significa que la varianza es una función lineal de la escala de observación h . Si a la ecuación (3.10) se le aplica la definición de semivarianza según:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \langle [X(t+h) - X(t)]^2 \rangle, \quad (3.11)$$

resulta finalmente la expresión:

$$\gamma(h) \propto h, \quad (3.12)$$

que pone en evidencia que para el movimiento Browniano la función semivarianza presenta una relación de escala con la distancia.

3.2.2. Movimiento browniano fraccionario

El movimiento Browniano fraccionario (mBf) fue introducido por Mandelbrot (1982). Su definición parte de una generalización de la relación de escalamiento para el movimiento Browniano simple, presentado en la ecuación (3.10), de lo que resulta:

$$\langle [X_H(t+h) - X_H(t)]^2 \rangle = 2Fh^{2H}, \quad (3.13)$$

donde H es un parámetro tal que $H \in (0, 1)$. Para $H = 1/2$, se tiene el caso especial de incrementos independientes válido para el movimiento Browniano simple, y la variable posición será denominada como $X_{1/2}(t) = X(t)$.

De forma similar al desarrollo efectuado para el movimiento Browniano simple, la ecuación (3.13) puede ser aplicada a la definición de semivarianza, de donde resulta:

$$\gamma(h) \propto h^{2H}. \quad (3.14)$$

La característica más importante del mBf es su longitud infinita de correlación. En particular, y referido a series de datos temporales, incrementos en el pasado $X(t) - X(t-h)$, están correlacionados con incrementos futuros $X(t+h) - X(t)$. La función de correlación normalizada de incrementos futuros con incrementos pasados viene dada por la siguiente expresión:

$$C(h) = \frac{\langle [X_H(t+h) - X_H(t)][X_H(t) - X_H(t-h)] \rangle}{\langle [X_H(t+h) - X_H(t)]^2 \rangle}. \quad (3.15)$$

Simplificando el cálculo se pueden formular, alternativamente, los términos relacionados con incrementos pasados y futuros de forma que:

$$[X_H(t+h) - X_H(t)] \equiv X(h). \quad (3.16)$$

y

$$[X_H(t) - X_H(t-h)] \equiv X(-h).$$

Por lo que la función de correlación se puede escribir de forma simplificada:

$$C(h) = \frac{\langle X(h)X(-h) \rangle}{\langle [X(h)]^2 \rangle}. \quad (3.17)$$

Utilizando las definiciones en (3.16) y la ecuación (3.13) se puede desarrollar la relación:

$$\langle [X(h) + X(-h)]^2 \rangle = \quad (3.18)$$

$$= \langle [X_H(t+h) - X_H(t-h)] \rangle = \langle X_H(t+2h) - X_H(t) \rangle = 2F(2h)^{2H}.$$

De forma que:

$$\langle X(h)^2 + 2X(h)X(-h) + X(-h)^2 \rangle = \quad (3.19)$$

$$\langle X(h)^2 \rangle + 2\langle X(h)X(-h) \rangle + \langle X(-h)^2 \rangle = 2F(2h)^{2H}.$$

De acuerdo con la ecuación (3.13) $\langle X(h) \rangle = \langle X(-h) \rangle = 2Fh^{2H}$, substituyendo en la ecuación (3.19) se obtiene:

$$\langle X(h)X(-h) \rangle = F(2h)^{2H} - 2F(2h)^{2H}. \quad (3.20)$$

Y al substituir esta última en la ecuación (3.17) se obtiene la función de correlación normalizada entre incrementos en el pasado y futuro:

$$C(h) = 2^{2H-1} - 1. \quad (3.21)$$

Para el caso en que $H = \frac{1}{2}$ (mB) la ecuación (3.21) es nula, o sea, no hay correlación, pero para $H \neq \frac{1}{2}$, $C(h) \neq 0$, independiente de la escala h , siendo positiva para $H > 1/2$ y negativa para $H < 1/2$. Este importante aspecto del movimiento Browniano fraccionario implica en una dinámica generadora persistente o antipersistente. Para $H > 1/2$, tenemos persistencia, lo que significa que incrementos positivos en el pasado implican en una mayor probabilidad de incrementos positivos en el futuro, o al contrario, incrementos negativos en el pasado implican en incrementos negativos en el futuro. En el caso de $H < 1/2$ tenemos una dinámica antipersistente, lo que significa que tendencias crecien-

tes en el pasado implican en tendencias decrecientes en el futuro, o tendencias decrecientes en el pasado implican en tendencias crecientes en el futuro.

Es importante resaltar que el comportamiento estadístico inferido a partir de la ecuación (3.21) entra en conflicto con los axiomas o principios generalmente asumido para los sistemas físicos. De hecho, para la física estadística, se asume que eventos pueden estar correlacionados mientras estén separados por un intervalo de tiempo Δt , pero estos eventos estarán definitivamente descorrelacionados en el límite de $\Delta t \rightarrow \infty$. Esta independencia estadística a largos intervalos de tiempo y/o espacio es un ingrediente esencial en el concepto del equilibrio térmico. Pero para el caso de dinámicas del no equilibrio, como por ejemplo los puntos críticos en las transiciones de fase de segundo orden de fluidos, la función de correlación asume una dependencia espacial o temporal en forma de una ley de potencia, con un comportamiento sin una escala intrínseca definida.

3.3. Metodología

Las fluctuaciones de precios en el mercado financiero constituyen fuentes de información económica primaria que han sido investigadas por ejemplo por Foster y Viswanathan (1993) y Ederington y Lee (1993) con el objetivo de entender características específicas de la dinámica financiera, tal como la tendencia en el aumento o disminución en los cambios de precios. Estudios sobre señales naturales no estacionarias ganaron recientemente un importante espacio en varias áreas como física, biología, economía y finanzas, debido a sus propiedades dinámicas que incluyen invarianza de escala, correlación de volatilidades, colas pesadas o características multifractales (Bouchaud y Potters, 2000; Mantegna y Stanley, 2007; Peng et al., 1992).

Una forma de cuantificar alguna de las propiedades fractales en las fluctuaciones financieras es calculando y graficando la función de autocorrelación de los cambios de precios en un gráfico doble logarítmico. A través de este formato de trabajo se obtiene una ecuación de ley de potencia, donde la pendiente es el exponente de escala H , invariable bajo estas circunstancias. Las diferentes técnicas basadas en el análisis fractal sugieren que los datos de mercado muestran correlaciones temporales y distribuciones de probabilidad de cola pesada. La correlación temporal significa que las fluctuaciones volátiles tienden a ocurrir con una tendencia particular, mientras que la de distribución de cola pesada significa que un evento más extremo podría ser más frecuente que uno normalmente distribuido. El concepto fractal, que está vinculado

a la invarianza de escala temporal, se utiliza para identificar el orden en los problemas no lineales característicos.

Presentado por Peng et al. (1994a), el análisis de fluctuaciones sin tendencia (DFA) fue desarrollado para determinar autosimilaridades, propiedades de correlación del tipo fractal. Este método es menos sensible a los efectos del ruido y no estacionariedad y tiene la ventaja de que sus exponentes pueden ser calculados sin la remoción de datos discrepantes (Peng et al., 2000). Suponiendo que las fluctuaciones de precios son originadas por estímulos descorrelacionados, estas pueden ser descompuestas de las fluctuaciones producidas por el sistema dinámico que aparentemente regula su frecuencia, debiendo presentar diferentes propiedades de correlación. En este caso, decir que las fluctuaciones de largo plazo surgen de la dinámica del sistema complejo es una consideración que este método asume. En su forma original el método elimina las tendencias lineales de la serie calculando las fluctuaciones en torno al mejor ajuste lineal en una caja de tamaño n (Moreira et al., 1994; Peng et al., 1994a).

El DFA es muy útil porque permite eliminar las tendencias en varias regiones de escala que reflejan el ajuste global del sistema a un parámetro de variación, en vez de reflejarlo en las propiedades dinámicas del sistema. En tales circunstancias es fundamental tener una cuidadosa consideración sobre si las tendencias tiene que ser filtradas o no, ya que, si son intrínsecas, pueden estar relacionadas con las propiedades locales de las fluctuaciones de la señal. En general, se denomina DFA_q la variante que permite suprimir las tendencias de orden $q = 1$, o sea, en función de un ajuste de un polinomio de grado 1. Evidentemente, la determinación de la orden del DFA_q utilizado precisa del conocimiento del comportamiento de los factores externos que puedan crear tendencias en la dinámica del sistema en estudio (Peng et al., 1994a, 2000). Versiones generalizadas de la idea original han sido propuestas, en las cuales las tendencias pueden ser eliminadas con un ajuste que depende del grado del polinomio característico que se ajusta q (DFA_q) (Kantelhardt et al., 2001, 2002).

3.3.1. DFA

La estructura de dependencia del tiempo de un proceso estocástico puede ser capturado por medio de la función de autocorrelación. La memoria a largo plazo, que se caracteriza por las autocorrelaciones en los retardos muy altos, crea persistencia (anti-persistencia) en la serie de horizontes de tiempo prolongados. En dichos casos, la autocorrelación disminuye a un ritmo hiperbólico que es más lento que el ritmo exponencial en los procesos autorregresivos y

media móvil (ARMA). Mills (1999) sugiere que muchas series de tiempo observadas empíricamente, a pesar de que parecieran satisfacer la hipótesis de la estacionariedad con o sin diferenciación, parecen mostrar dependencia entre las observaciones a distancia que, aunque pequeña, no es insignificante. Los distintos enfoques para estimar el parámetro de una memoria larga (diferenciación fraccional) incluyen, en series de tiempo financieras, el modelo autorregresivo y fraccionalmente integrado y media móvil ARFIMA (p, d, q) , que tiene la capacidad deseada para que coincida con la lenta decadencia de las funciones de autocorrelación. La diferencia entre los modelos ARFIMA (p, d, q) y ARIMA, el modelo autorregresivo integrada de media móvil (p, d, q) , es que el primero no restringir el parámetro d a ser un valor entero, pero le permite tomar un valor fraccionario. Para valores no enteros de d , la autocorrelación disminuye hiperbólicamente. Cuando $0 < d < 1/2$ del proceso ARFIMA se dice que presentan la memoria larga con dependencia positiva. Para $d = 1$ el proceso ARFIMA es por lo tanto, idéntico a un ARIMA en que las autocorrelaciones decaen exponencialmente. Para $d = 0$, el proceso de ARFIMA se reduce a un proceso ARMA y presenta sólo la memoria corta y para $-0.5 < d < 0$, el proceso ARFIMA presenta la memoria larga con una dependencia negativa.

DFA es un método desarrollado por Peng et al. (1994a, 2000) que ha sido utilizado para determinar el exponente cuantitativo de Hurst H , lo que representa las propiedades de autocorrelación de una señal. Basados en el análisis de fluctuaciones en una serie temporal de diferentes escalas de tiempo, el DFA se centra en la eliminación de la tendencia de la señal, lo que no debería estar relacionado con las propiedades de correlación de la señal. Una tendencia puede ser producida al unirse a los movimientos de precios en otros mercados. Bajo estas circunstancias, es muy importante tener en cuenta si la tendencia puede ser filtrada, como una tendencia intrínseca que puede estar relacionada con las propiedades de fluctuación de la señal local. En general, el DFA- q es la variable utilizada para eliminar la tendencia de primer orden $q = 1$; en otras palabras, la función se ajusta mediante una ecuación polinómica de primer orden. Por lo tanto, con el fin de determinar el orden DFA- q es crucial tener en cuenta los factores externos que podrían constituir la causa de una tendencia. El método de DFA por lo tanto permite identificar un parámetro cuantitativo H que representa las propiedades de correlación de una señal. Proponemos usar este método para cuantificar el período de tiempo durante el cual un mercado se comporta como un fBm, medido por el comportamiento temporal del parámetro H . El algoritmo DFA consta de seis pasos básicos que se describen a continuación.

1. Si comenzamos con una serie de incrementos de tiempo equidistantes $\{x(t)\}, t = 1, \dots, N$, se puede obtener el perfil

$$y(t) = \sum_{j=1}^t x(j). \quad (3.22)$$

2. Todo el intervalo $[1, N]$ se puede dividir en una serie de M_ν cajas de tamaño ν , no necesariamente auto-excluyentes. Cada caja recibe una etiqueta $(m, \nu), m = 1, \dots, M_\nu$. En nuestros cálculos, consideramos un cierto nivel de solapamiento entre las cajas con el fin de aumentar el número de cajas donde se aplica el método y, por tanto, mejorar las estadísticas. Para evaluar la magnitud de las fluctuaciones en la caja (m, ν) y, simultáneamente, eliminar la tendencia de orden q , consideramos la diferencia

$$y_s(t) = y(t) - p_q(t; (m, \nu)), \quad (3.23)$$

3. donde $p_q(t; (m, \nu))$ representa el polinomio de orden q que minimiza la suma de $y_s(t)^2$ cuando t se extiende por todos los puntos de la caja considerada. Para ser más precisos, consideramos el residuo

$$f(m, \nu) = \frac{1}{\nu} \sum_{j=I_{min}(m, \nu)}^{I_{max}(m, \nu)} y_s^2(j), \quad (3.24)$$

4. donde $I_{min}(m, \nu)$ y $I_{max}(m, \nu)$ son el límite inferior y superior de la caja (m, ν) . Cuando $q = 0$, $f(m, \nu)$ corresponde a la función de rugosidad $W(m, \nu)$ de la caja (m, ν) . Posteriormente, se considera el promedio

$$F(\nu) = \left[\frac{1}{M_\nu} \sum_{m=1}^{M_\nu} f(m, \nu) \right]^{1/2}, \quad (3.25)$$

5. que expresa la rugosidad media sin tendencia a una escala de longitud ν de todo el perfil. Si la serie original presenta correlaciones de largo alcance, se espera que los valores de $F(\nu)$ sigan una ley de potencia

$$F(\nu) \sim \nu^H, \quad (3.26)$$

6. donde el exponente de rugosidad $H = 1 - \gamma/2$ está relacionado con el exponente que describe la decadencia de la función de correlación $C(j) =$

$$E[y(t)y(t+j)] \sim j^{-\gamma} \text{ (Mills, 1999).}$$

En la práctica, esto significa que el exponente puede ser calculado con un ajuste lineal en una escala doble logarítmica de ν en función de $F(\nu)$. El exponente de fluctuación se puede clasificar de acuerdo a un grupo dinámico de valores:

- $H < 0.5$: anti-correlacionada, señal antipersistente.
- $H = 0.5$: no correlacionada, ruido blanco, sin memoria.
- $H > 0.5$: tiene correlaciones de largo alcance.

Las propiedades de la correlación temporal de una serie están dadas por la persistencia de la correlación, que puede ser caracterizada por el exponente Hurst. Un exponente $H > 1/2$ para una serie indica un comportamiento persistente: los incrementos positivos (negativos) son más propensos a ser seguidos por los incrementos positivos (negativos) en el futuro. Si las fluctuaciones del mercado son persistentes, los cambios en los precios serían mucho más frecuentes a largo plazo, lo cual es muy atractivo para los especuladores interesados en una ganancia adicional en rentabilidad. Un exponente $H < 1/2$ para una serie indica conducta anti-persistente: los incrementos positivos (negativos) son más propensos a ser seguidos por incrementos negativos (positivos) en el futuro. Si las fluctuaciones del mercado son anti-persistentes, serían más pequeñas que las fluctuaciones persistentes ya que las fluctuaciones anti-persistentes tienen menor varianza. Las fluctuaciones Brownianas son un equilibrio entre las conductas persistentes y anti-persistentes debido a los cambios de precios que son independientes el uno del otro. De hecho, si $H = 1/2$ la serie de tiempo no está correlacionada y sus movimientos no pueden ser predecibles, lo cual es consistente con la hipótesis débil de la eficiencia del mercado. Por lo tanto, un exponente Hurst puede identificar las características del mecanismo de autorregulación del sistema. Esto es útil en la cuantificación de la velocidad de ajuste de precios a un paseo aleatorio; su valor en diferentes escalas de tiempo es considerado con el fin de determinar el horizonte de tiempo en el que el exponente Hurst se vuelve permanentemente igual a $1/2$.

3.3.2. DCCA

En un trabajo reciente de [Podobnik y Stanley \(2008\)](#), la idea del análisis sin tendencia fue ampliada y llamada de Análisis de Correlaciones Cruzadas sin Tendencia - DCCA, que generaliza el método DFA y que se propone estimar

el exponente que caracteriza la correlación entre dos series temporales $\{y_i\}$ e $\{y'_i\}$, con el mismo número de N observaciones, en régimen no estacionario.

De esta forma, para poder cuantificar la dependencia entre dos series temporales, adoptamos la reciente propuesta implementada por Zebende (Zebende, 2011), basada en el método DCCA (Podobnik y Stanley, 2008). El método DCCA es una generalización del método DFA: recordemos que el método DFA de Peng et al. (1994b) proporciona una relación entre $F_{DFA}(n)$ (fluctuación root mean square) y la escala n , caracterizada por una ley de potencia del tipo $F_{DFA}(n) \propto n^\alpha$. De esta forma, α es el exponente de escala de la auto-correlación a largo plazo, por ejemplo si $\alpha = 1/2$, la señal no es correlacionada; si $\alpha < 1/2$, la señal es anti-persistente; y si $\alpha > 1/2$ representa una señal persistente.

Para dos series temporales de igual longitud N , calculamos las dos series integradas $R_k \equiv \sum_{i=1}^k y_i$ y $R'_k \equiv \sum_{i=1}^k y'_i$, donde $k = 1, \dots, N$. En la etapa siguiente, dividimos las series temporales en $N - n$ cajas sobrepuestas, cada una conteniendo $n + 1$ valores. Para ambas series temporales, en cada caja que empieza en i y termina en $i + n$, definimos la tendencia local, $\tilde{R}_{k,i}$ y $\tilde{R}'_{k,i}$ ($i \leq k \leq i + n$), como la ordenada del ajuste lineal a través de mínimos cuadrados. Definimos el paso “destendenciado” como la diferencia entre el paso original y la tendencia local. A continuación calculamos la co-varianza de los residuos en cada caja $f_{DCCA}^2(n, i) \equiv 1/(n + 1) \sum_{k=i}^{i+n} (R_k - \tilde{R}_{k,i})(R'_k - \tilde{R}'_{k,i})$. Terminamos calculando la función co-varianza sin tendencia, sumando todas las cajas sobrepuestas $N - n$ de tamaño n :

$$F_{DCCA}^2(n) \equiv (N - n)^{-1} \sum_{i=1}^{N-n} f_{DCCA}^2(n, i). \quad (3.27)$$

Cuando analizamos solo uno de los paseos aleatorios, ($R_k = R'_k$), la co-varianza sin tendencia $F_{DCCA}^2(n)$ se reduce a la varianza sin tendencia $F_{DFA}^2(n)$ usada en el método DFA. Si la auto-afinidad aparece, entonces $F_{DCCA}^2(n) \sim n^{2\lambda}$. El DCCA fue aplicado a muchas situaciones (Jun et al., 2006; Podobnik et al., 2009a,b; Zebende et al., 2011; Zebende y Machado-Filho, 2009; Zhou, 2008). El exponente λ cuantifica las correlaciones cruzadas de ley de potencia a largo plazo, y también identifica la estacionalidad (Zebende y Machado-Filho, 2009), pero λ no cuantifica el nivel de las correlaciones cruzadas.

Para cuantificar el nivel de correlaciones cruzadas, podemos aplicar el coeficiente de correlación cruzada DCCA de (Zebende, 2011), que se define como el cociente entre la función de co-varianza sin tendencia F_{DCCA}^2 y la función de varianza sin tendencia F_{DFA} , es decir:

$$\rho_{DCCA} \equiv \frac{F_{DCCA}^2}{F_{DFA\{y_i\}} F_{DFA\{y'_i\}}}. \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) nos conduce a una nueva escala de correlación cruzada en series temporales no-estacionarias³. El valor de ρ_{DCCA} se sitúa entre $-1 \leq \rho_{DCCA} \leq 1$. Un valor de $\rho_{DCCA} = 0$ significa que no hay correlación cruzada, y esto divide el nivel de correlaciones cruzadas entre el caso positivo y el caso negativo. El exponente ρ_{DCCA} ha sido testado en series temporales simuladas y en casos reales, y demostró que es bastante robusto (Podobnik et al., 2011).

Al igual que en Gallegati (2010), podemos considerar la existencia de contagio e interdependencia como un cambio en el nivel de correlación ρ_{DCCA} para pequeñas y grandes escalas entre dos períodos diferentes, respectivamente. Por ejemplo, si denotamos la estimación del coeficiente de correlación cruzada sin tendencia para el período anterior a la última crisis financiera y para el período posterior de la misma como ρ_{DCCA}^A y ρ_{DCCA}^B , respectivamente, podemos contrastar la hipótesis nula de no-contagio y no interdependencia definida por:

$$H_0 : \rho_{DCCA}^A = \rho_{DCCA}^B. \quad (3.29)$$

Esta hipótesis de no-contagio o no interdependencia se puede rechazar con 95 % de confianza cuando los intervalos de confianza de los coeficientes de correlación no están superpuestos (véase, Gençay et al., 2002).

3.4. La velocidad de ajuste del precio de las acciones a la eficiencia del mercado

3.4.1. Introducción

La hipótesis de la eficiencia de mercado (Fama, 1970, 1991) establece que los precios de los activos se ajustan de forma completa para reflejar toda la información disponible y así mostrar un comportamiento martingala. A pesar que la formulación de esta hipótesis se refiere a un proceso de ajuste de precio rápido e imparcial, en la práctica, los precios tienden a no ajustarse a la nueva información de forma instantánea, sino después de un cierto período de tiempo. Durante este tiempo, los inversores toman decisiones de inversión que explotan las oportunidades temporales de ganancias que surjan de la nueva información que en última instancia, empujan los precios hacia la eficiencia. El tiempo que

³Se tiene que tener en cuenta que en (Zebende, 2011), la ecuación (3.28) fue escrita incorrectamente.

el mercado necesita para ajustar los precios a la eficiencia débil de mercado es una dimensión importante de la hipótesis de eficiencia de mercado (Chordia et al., 2005), con notables implicaciones prácticas para la negociación y la gestión de riesgos.

El ajuste de los precios de los activos a la información ha sido ampliamente estudiado a nivel teórico y empírico. Los modelos teóricos han sido desarrollados por Grossman (1976), Grossman y Stiglitz (1980) y Cornell y Roll (1981), en el cual la incorporación de la información a los precios de las acciones depende de los costos de la producción de información. En un marco de expectativas racionales Brown y Jennings (1989) y Grundy y McNichols (1989) muestran cómo los precios se ajustan en una secuencia de operaciones para revelar completamente toda la información pertinente. Para un modelo popularizado por los *traders* Bayesianos, Chakrabarti y Roll (1999) encontraron, en un estudio de simulación, que el mercado por lo general convergía más rápidamente a un precio de equilibrio cuando los arbitrajistas reaccionaban entre sí. Los modelos de comportamiento financieros han sido desarrollados por Barberis et al. (1998), Daniel et al. (1998) y Hong y Lee (2003) para dar explicaciones de los precios de las acciones a las noticias acerca de las infra reacciones y sobre reacciones documentadas empíricamente.

Empíricamente, varios estudios han examinado la eficiencia de mercado en términos de la velocidad con la que los precios reaccionan a la nueva información generada por cualquier evento específico (e.g., Busse y Green, 2002) o en un contexto más general, sin ningún evento identificado (e.g., Amihud y Mendelson, 1987). Las primeras pruebas de la eficiencia de mercado utilizaron la autocorrelación lineal y la prueba de varianza de Lo y Mackinlay (1988) para la rentabilidad diaria, semanal y mensual de valores. Sin embargo, este análisis supone linealidad (e.g., Hong y Lee, 2003; Hsieh, 1991; Mcqueen y Thorley, 1991), por lo que sólo es aplicable para determinar la incorrelación serial, si bien no permite analizar la propiedad martingala de la rentabilidad de los activos.

No hay ninguna razón para suponer que los precios de las acciones son intrínsecamente lineales. El error humano en razonar o en el procesamiento de la información (por ejemplo, sesgo en la información o la sobreconfianza) pueden explicar las imperfecciones en el procesamiento de la información en los mercados financieros (Kahneman y Tversky, 2000), o que puede dar lugar a no linealidad en los precios. La no linealidad también puede surgir de las burbujas especulativas racionales (Mcqueen y Thorley, 1991) o del resultado de complejas interacciones entre los operadores informados y desinformados

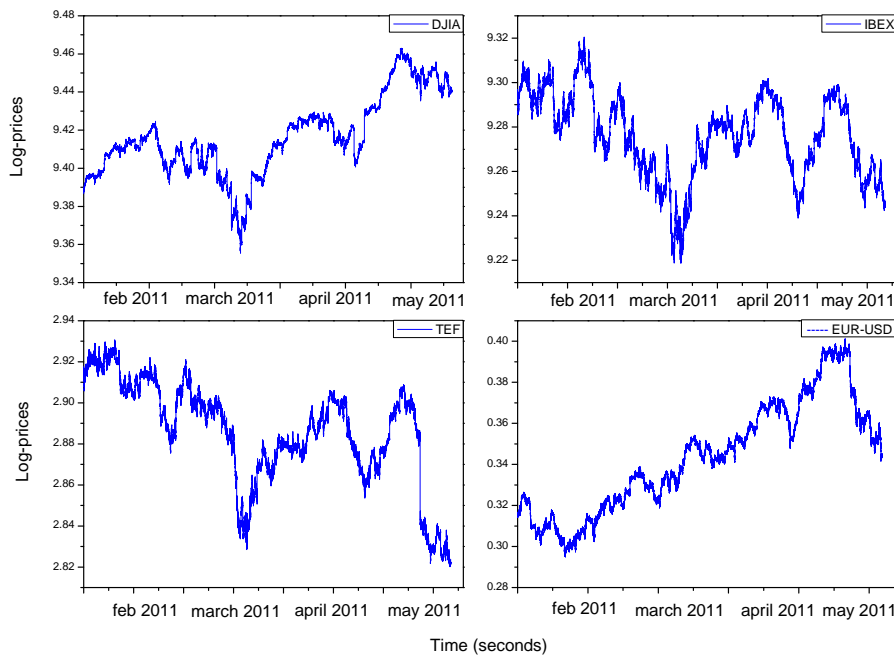
en el mercado. La no linealidad de las rentabilidades de valores es crucial para determinar la velocidad de la convergencia para la eficiencia de mercado ya que la autocorrelación cero no implica la propiedad de martingala del rendimiento de los activos. Las pruebas estadísticas elaboradas por [Hurst \(1951\)](#), [Brock et al. \(1987\)](#) and [Peng et al. \(1994a\)](#) se consideran superiores a las pruebas de autocorrelación lineal, ya que son capaces de detectar la presencia de la dependencia a corto y largo plazo. Basándose en dichas pruebas, se propone un enfoque plausible al problema de la medición del tiempo de ajuste de precios hacia la forma débil de la eficiencia de mercado. Este enfoque se basa en el empleo del análisis de fluctuación sin tendencia (DFA) ([Peng et al., 1994a](#)) para las diferentes escalas de tiempo para datos intradiarios a fin de identificar el horizonte temporal que es necesario para que los precios se ajusten a un movimiento browniano fraccional (fBm) con un exponente Hurst de 0.5. DFA ha sido utilizado para el análisis dinámico, entre otros, de la variabilidad del ritmo cardíaco ([Ivanov, 1996](#)), las fluctuaciones humanas electro-encefalográficas ([Robinson, 2003](#)) y las series económicas y financieras [Bunde \(2001\)](#), [Cajueiro y Tabak \(2005, 2006, 2008\)](#) y [Alvarez-Ramirez et al. \(2009\)](#). Las principales ventajas de la metodología de DFA en comparación con los métodos tradicionales (por ejemplo, el análisis de Hurst, R/S, RMS, V/S) son que: (a) permite detectar la auto semejanza en series de tiempo no estacionarias, lo que a su vez, permite analizar el log del precio, y que (b) evita la detección falsa de una aparente correlación de largo alcance mediante la exclusión de la tendencia intrínseca de las series financieras de tiempo.

3.4.2. Datos

Estudiamos los datos intradiarios “tick-by-tick” para los índices Down Jones Industrial Average (DJIA) e IBEX-35, para la tasa de cambio EUR-USD y también para la acción de Telefónica España (TEF). Los datos corresponden a 74 días hábiles que van desde el 1 de febrero al 13 de mayo de 2011 y fueron obtenidos de Bloomberg a través de Infomercados. La representación gráfica de la dinámica del registro de precios para todas las series se ilustra en la figura 3.3 para intervalos de tiempo de 1 minuto (el precio representativo fue tomado como el precio más cercano al final del intervalo de tiempo, teniendo intervalos temporales para cada día de negociación desde el tiempo de apertura hasta su cierre). Como es habitual, la rentabilidad continua intradiaria se calcula como la primera diferencia del precio logarítmico. Las rentabilidades de la figura 3.4, muestran un comportamiento complejo con componentes estocásticos.

Los datos intradiarios fueron sometidos a dos tipos de tratamiento depen-

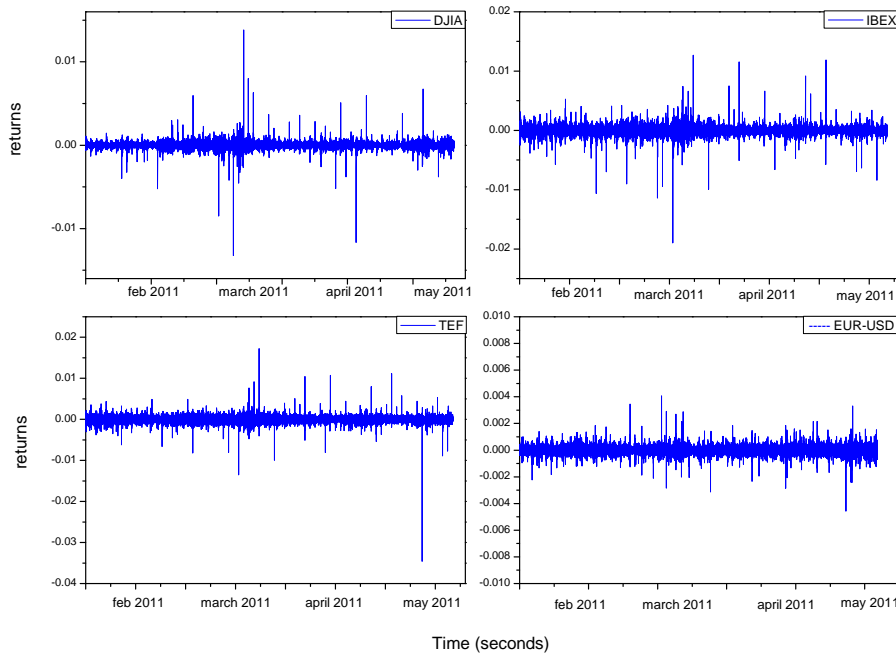
Figura 3.3: Log-precios del DJIA, IBEX-35, Telefónica España (TEF) y la tasa de cambio EUR-USD.



diendo del tipo de respuesta obtenida de la metodología DFA. La primera posibilidad proporcionada por el análisis DFA es observar el comportamiento global de una serie temporal. En este formato de respuesta, la serie de temporal intradiaria se muestra a diferentes intervalos de tiempo. Específicamente, obtuvimos 30 series de espacios temporales que van desde 1 a 30 minutos para cada una de las 4 series analizadas. Para cada una de estas series, calculamos el exponente de Hurst entre una caja mínima de 5 minutos y una caja máxima de 120 minutos. Así pudimos determinar la escala específica de tiempo (en minutos) en el cual los precios se ajustaron a fBm con un exponente Hurst de 0.5.

La segunda posibilidad que nos dá el DFA es la de observar el comportamiento del exponente Hurst en una serie para un nivel temporal pre-determinado. Esto se hace mediante la variación del tiempo Hurst a través de diferentes días para los mismos puntos de tiempo (por ejemplo, a las 9:45:30 o 13:20:30, etc) con el fin de obtener localmente el exponente Hurst para cada momento del día. Tomando las series intradiarias a cada 30 segundos después de la apertura, calculamos el exponente Hurst para todos los momentos del día de negociación. De este modo observamos el comportamiento promedio del exponente

Figura 3.4: Rentabilidades del DJIA, IBEX-35, Telefónica España (TEF) y la tasa de cambio EUR-USD.



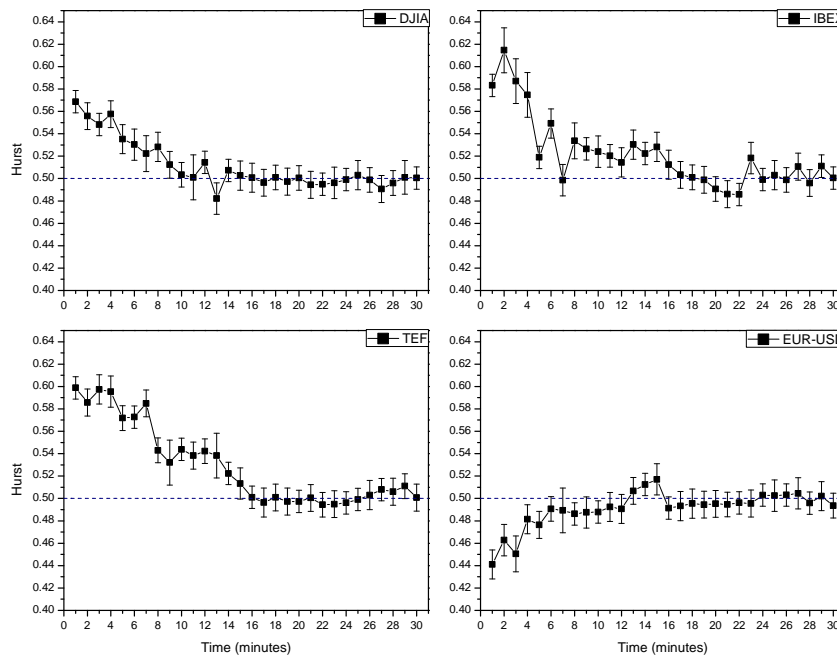
Hurst para los 74 días de negociación y se proporciona información sobre los momentos del día en que los precios tenderían a converger a un fBm.

3.4.3. Resultados

El exponente Hurst fue calculado para 30 series temporales intradiarias de 1 a 30 minutos de acuerdo con la metodología descrita en la Sección 3.3.1. Los resultados del análisis global están representados en la figura 3.5, mientras que la figura 3.6 muestra los resultados promedios de series intradiarias a 30 segundos de los 74 días analizados sobre una ventana fluctuante de 400 observaciones.

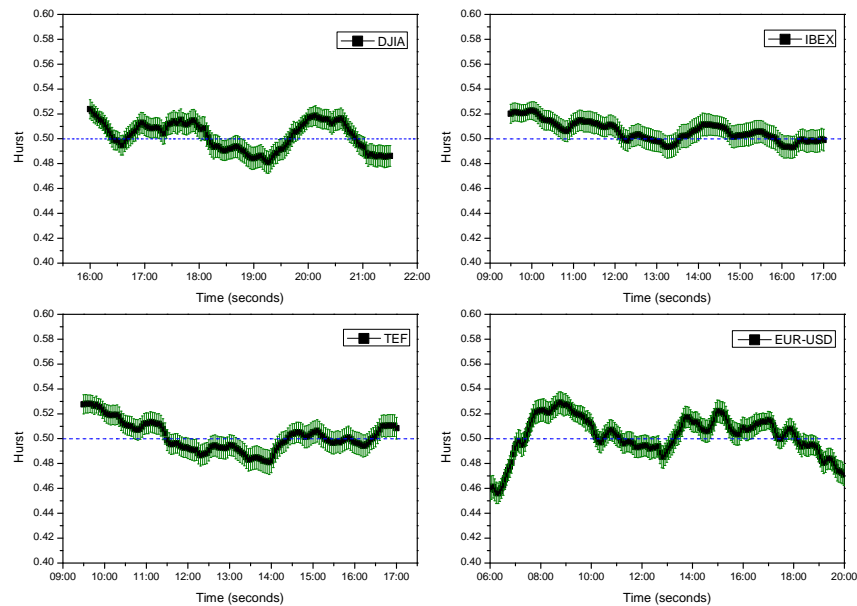
Los resultados del análisis global mostrado en la Figura 3.5 indican que, para grandes escalas de tiempo, todas las series muestran un comportamiento de movimiento browniano, con un exponente de rugosidad promedio de $H = 1/2$, lo que es evidencia de un comportamiento incorrelacionado, lo que sugiere que las variaciones de precios no pueden ser predecibles. Sin embargo, para las pequeñas escalas de tiempo, los resultados muestran dos tendencias diferentes: (a) las dinámicas de las variaciones de precios son persistentes para los dos índices bursátiles y también para la acción de Telefónica; y (b) la dinámica de la tasa

Figura 3.5: Convergencia de escala de las series temporales intradía: en el panel superior izquierdo, el índice DJIA, en el panel superior derecho, el IBEX-35, en el panel inferior izquierdo, Telefónica España (TEF), en el panel inferior derecho, EUR-USD el índice de la tasa de cambio. Las barras de error son obtenidas a través del error de ajuste estándar (mínimos cuadrados ordinarios) para el exponente Hurst.



de cambio EUR-USD es anti-persistente, sugiriendo un comportamiento de reversión a la media para las escalas de tiempo pequeñas. Las escalas temporales de convergencia son diferentes para cada uno de los mercados considerados. En particular, el comportamiento persistente para el DJIA, IBEX-35 y las acciones de la Telefónica se observó en períodos temporales de menos de 14, 17 y 16 minutos, respectivamente, mientras que el período de anti-persistencia para la tasa de cambio EUR-USD fue apenas 7 minutos. Estos resultados sugieren diferentes velocidades de convergencia en diferentes mercados y corroborarían la evidencia de que los mercados de cambio de divisas convergen a un fBm mucho más rápidamente que los mercados de valores. Esto reafirma la percepción general de que el mercado de divisa es mucho más eficiente que los mercados de valores. Nuestros resultados también son consistentes con los datos recogidos en la literatura por Hillmer y Yu (1979), Chordia et al. (2005, 2008) y Visaltanachoti y Yang (2010), lo que sugiere que los precios se ajustan rápidamente a la eficiencia de mercado.

Figura 3.6: Exponente de Hurst promedio para los 74 días de las series temporales intradiarias a 30 segundos: el panel superior izquierdo, el índice DJIA; en el panel superior derecho, el índice IBEX-35, en el panel inferior izquierdo, Telefónica España (TEF); en el panel inferior derecho, el índice de cambio de EUR-USD. La línea de color negro y la área traceada de color verde indican el valor del exponente Hurst y la desviación estándar del exponente de Hurst durante los 74 días respectivamente.



La figura 3.6 muestra el comportamiento promedio del exponente Hurst a lo largo de un día de negociación en función de los 74 días analizados. Dos tipos de conducta de escala pueden ser observados. Para la acción de telefónica y los índices de precios del DJIA e IBEX-35 son débilmente persistentes en los momentos de la apertura y cierre del día, con incorrelación o comportamiento impredecible para el resto del día. Esta evidencia es consistente con los patrones de volumen intradiario, volatilidad y patrones de duración de tiempos de transacción (O'Hara, 1995). Por otro lado, la conducta anti-persistente puede ser observada para la serie EUR-USD en el comienzo y el final del día, lo que indica reversión a la media en esos momentos. Al mediodía y por la tarde, sin embargo, la serie fluctuó alrededor de $H = 0.5$ (paseo aleatorio). Comparando la figura 3.5 y la Figura 3.6, se puede observar que el comportamiento del exponente Hurst para escalas de tiempo pequeñas en las series de DJIA, IBEX-35 and TEF fue producido por los cambios a lo largo del día. En la figura 3.6 el exponente Hurst muestra pequeños cambios a lo largo del día, en

la serie de EUR-USD los cambios en el comportamiento son mucho más altos e interfieren en las fluctuaciones de pequeña escala expuestas en la figura 3.5.

3.4.4. Consideraciones finales

En este capítulo hemos analizado la velocidad de convergencia a la eficiencia del mercado mediante el uso de DFA para examinar las propiedades de escala de los precios intradiarios. Nos centramos en estimar el exponente Hurst para diferentes escalas temporales intradiarias con el fin de determinar las escalas de tiempo durante en el cual las variaciones en el precio de los activos convergen a un fBm.

La tasa de cambio EUR-USD, DJIA, IBEX-35 y TEF indican que hubo un rápido ajuste a un fBm y que a lo largo del día de negociación y en pequeñas escalas de tiempo, hubo una tendencia a asumir un comportamiento de paseo aleatorio, lo que significa que los agentes podrían aprovechar las ganancias derivadas de la predictibilidad sólo en esos momentos. Los resultados también muestran que el mercado de divisas es mucho más eficiente que el mercado de valores, ya que el anterior converge más rápidamente a un paseo aleatorio. Para pequeñas escalas de tiempo el mercado de divisas tiene una conducta antipersistente, lo que significa un comportamiento de reversión a la media. Sin embargo, las acciones comienzan a converger a un fBm con un comportamiento persistente, lo que significa que los eventos futuros tendrían el mismo comportamiento como aquel previamente observado. Los resultados del segundo análisis intradiario muestran que, en promedio, el comportamiento en un día de negociación tiende a converger a un fBm al principio y al final del día y no tiende a converger a un paseo aleatorio, como en el análisis global. En conclusión, el comportamiento persistente es evidente en el mercado de valores, mientras que el comportamiento anti-persistente caracteriza al mercado de divisas.

3.5. La dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio: Una aproximación con correlaciones cruzadas sin tendencia

3.5.1. Introducción

En los últimos años, los movimientos conjuntos en el precio del petróleo y el dólar americano (USD), sobre todo en el período posterior al inicio de la

crisis financiera, ha revitalizado el interés por la relación entre el precio del petróleo y los tipos de cambio. Una inspección visual de los movimientos del petróleo y el dólar desde el comienzo del año 2000 (Figura 3.7) muestra que, mientras el precio del petróleo del West Texas Intermediate (WTI) aumentó de 25 dólares el barril a un máximo histórico de 145 dólares por barril en julio de 2008, el valor relativo al dólar ha caído, principalmente frente al euro. Sin embargo, después de la aparición de la crisis financiera, los precios del petróleo cayeron a un mínimo de 30 dólares en diciembre de 2008, mientras que el dólar se apreció para el mismo período. No obstante, el valor del dólar cayó de nuevo desde el comienzo de 2009, mientras que el precio del petróleo aumentó para situarse alrededor de 80 dólares y se mantuvo por encima de los 100 dólares en 2010.

En la literatura, el nexo entre los precios del petróleo y los tipos de cambio está bien establecido. En primer lugar, el papel que desempeña el precio del petróleo cuando se trata de explicar los movimientos de los tipos de cambio fue observado inicialmente por Golub (1983) y Krugman (1983): un país exportador (importador) de petróleo puede sufrir una apreciación (depreciación) de los tipos de cambio cuando los precios del crudo suben. De la misma forma, los trabajos de Golub (1983), Amano y Norden (1998), Akram (2004), Huang y Guo (2007), Chen y Chen (2007) y Lizardo y Mollick (2010) proporcionan soporte empírico sobre el papel de los tipos de cambio para la determinación del precio del petróleo. Por otro lado, la importancia de las tipos de cambio para el movimiento del precio del petróleo, destacada por Bloomberg y Harris (1995), se basa en la ley del precio único para los bienes comercializables: dado que el petróleo es una mercancía homogénea que se comercializa internacionalmente en dólares USD, una depreciación del dólar reduce los precios del petróleo para los países que no utilizan el dólar USD en relación a sus mercancías que se encarecen en moneda extranjera. Esto tiene como consecuencia el incremento del poder adquisitivo y de la demanda de petróleo por parte de los consumidores extranjeros (no americanos), lo cual, a su vez, hace subir los precios del petróleo en dólares. La evidencia empírica del efecto de un dólar débil sobre la subida de los precios del petróleo fue reportada, entre otros, por Pindyck y Rotemberg (1990), Bloomberg y Harris (1995), Sadorsky (2000), Yousefi y Wirjanto (2004), Zhang et al. (2008) y Akram (2009).

A pesar de que la investigación empírica previa haya examinado el papel del nexo entre petróleo y los tipos de cambio para una, o, como mucho, dos escalas de tiempo (a corto y largo plazo) usando diferentes técnicas econométricas (por ejemplo, la teoría de co-integración o los modelos de vectores autoregresivos),

se sabe poco sobre la forma en que el precio del petróleo y la tasa de cambio se mueven conjuntamente en diferentes escalas de tiempo. El trabajo de esta sección cubre este vacío, examinando de nuevo la interdependencia petróleo y los tipos de cambio en diferentes escalas de tiempo, a través del análisis de correlación cruzada sin tendencia, desarrollada por Zebende (2011). Este enfoque está motivado por el hecho de que la transmisión de un *shock* en la tasa de cambio sobre el petróleo o del dólar se puede observar para diferentes escalas de tiempo, ya que los inversores en estos mercados podrían ser heterogéneos respecto a sus horizontes de inversión. Además, el cálculo de algunas medidas de riesgo, como el *value-at-risk* o la pérdida esperada (*expected shortfall*), exige medidas de dependencia en diferentes escalas de tiempo en las cuales el riesgo debería medirse acorde con el horizonte temporal de los inversores.

Basados en los valores de la correlación cruzada en diferentes escalas de temporales, proponemos un test para identificar el contagio y la interdependencia entre el petróleo y los tipos de cambio USD, que consiste en intervalos de confianza sobrepuestos para el nivel de coeficientes de correlación obtenidos a través de la correlación cruzada sin tendencia en diferentes escalas de tiempo para los periodos anteriores y posteriores a la crisis financiera. Este test tiene el mismo espíritu que el test propuesto en Gallegati (2010): La transmisión de un *shock* debido al contagio es rápida y se desvanece rápidamente; entonces los cambios de correlaciones cruzadas entre las series de tiempo a escalas de tiempo pequeñas están asociados con el contagio, mientras que los cambios a escalas de tiempo más altas están asociados con la interdependencia y el co-movimiento.

Nuestro análisis empírico trata de responder a tres preguntas fundamentales: ¿Está el valor del dólar-USD negativamente correlacionado con el precio del petróleo?, ¿cambia la dependencia entre el petróleo y la tasa de cambio del USD según la escala de tiempo? y ¿ha cambiado la relación entre el petróleo y la tasa de cambio del USD desde la llegada de la crisis financiera? Usando datos sobre el tipo de cambio del USD contra un amplio conjunto de monedas para el período de enero 2000 hasta mayo de 2012, la evidencia empírica revela dos nuevos resultados. Primero, el precio del petróleo y el valor del dólar USD se movieron en direcciones opuestas en el periodo anterior a la crisis financiera, con correlaciones negativas y bajas para las escalas temporales más pequeñas, teniendo generalmente valores más bajos para escalas de tiempo más altas. En segundo lugar, la correlación cruzada negativa ha disminuido significativamente para todas las escalas de tiempo, especialmente para escalas de tiempo más altas, con el comienzo de la crisis financiera, lo cual nos aporta pruebas

de contagio, así como un aumento de la interdependencia. El hecho de que los mercados del petróleo y de los tipos de cambio se volvieran más negativamente dependientes en el período posterior al comienzo de la crisis financiera significa que los beneficios de diversificación de los inversores que operan en esos mercados fueron aumentados considerablemente.

3.5.2. Revisión de la literatura y marco teórico

De acuerdo con las explicaciones teóricas sobre la relación entre el precio del petróleo y los tipos de cambio que fueron mencionadas tanto en la introducción como en el capítulo 2 secciones 2.5.2 y 2.5.3, la literatura empírica ha investigado la influencia recíproca que tiene el precio del petróleo y el tipo de cambio, por lo general la búsqueda es de una relación negativa entre ellos.

3.5.3. Datos

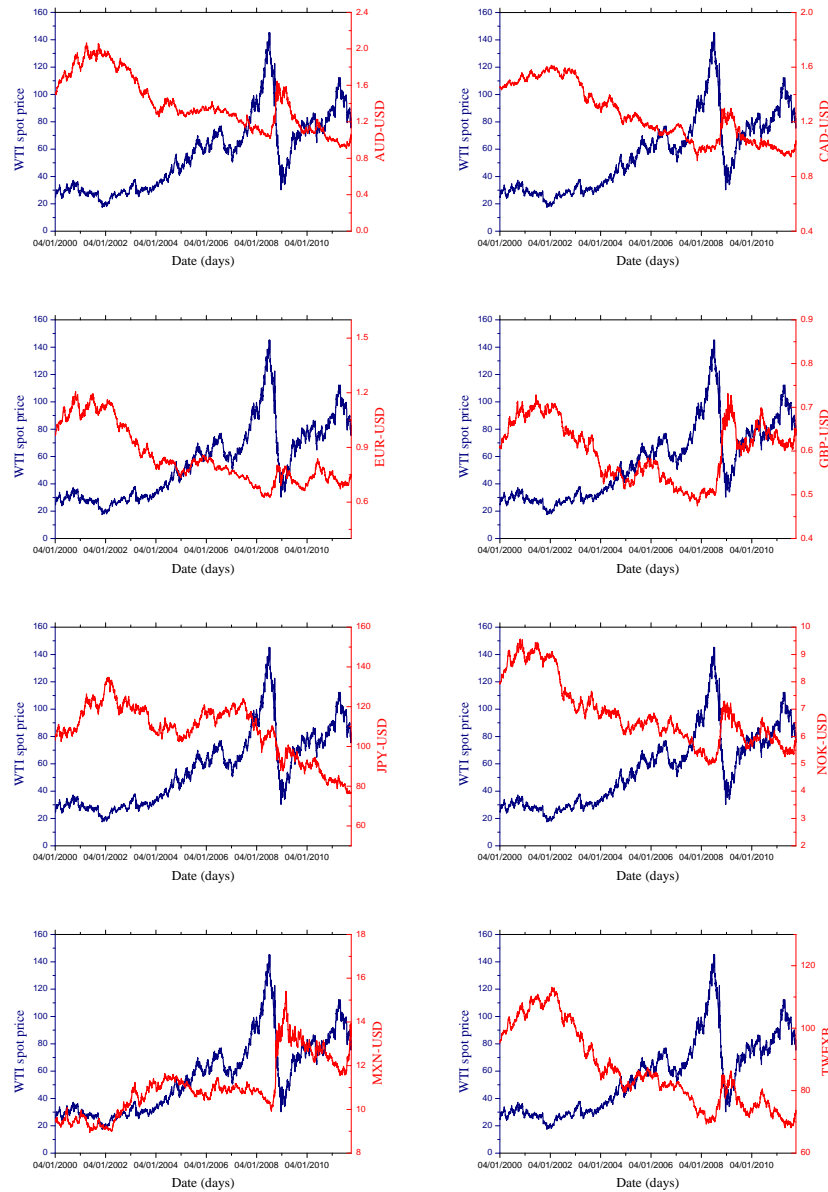
Para analizar empíricamente la dependencia entre los tipos de cambio y el precio del petróleo hemos utilizado las mismas observaciones que en el capítulo 2 sección 2.5.4 solo que desde el 4 de Enero del 2000 al 5 de Mayo del 2012. La figura 3.7 ilustra la dinámica del precio del petróleo y los tipos de cambio para los distintos países considerados en todo el período del análisis. Como visto en el capítulo 2 sección 2.5.4 el precio del petróleo y las diferentes tasa de cambio tienden a moverse en direcciones opuestas antes de 2008 y a tener un movimiento conjunto después de la crisis de 2008. El cuadro 3.1 muestra las estadísticas descriptivas para el precio del petróleo y los tipos de cambio para los dos períodos muestrales (antes y después del 15 de julio de 2008)⁴. Sin embargo, la estadística descriptiva, sobre todo desde el punto de vista del coeficiente de correlación de Pearson, puede no ser robusta (Wilcox, 2005) y puede inducir a errores si valores atípicos están presentes, como los datos analizados se caracterizan por tener algún grado de no estacionariedad (Devlin et al., 1975). Pensando en esta situación, la siguiente sección se dedica al análisis del coeficiente de correlación cruzada sin tendencia.

3.5.4. Resultados

Para cuantificar la dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio (USD), usamos la propuesta implementada por Zebende (2011), basada en el método DCCA (Podobnik y Stanley, 2008). De esta forma, aplicamos el

⁴Para más detalles del análisis descriptivo de los datos ver capítulo 2 sección 2.5.4.

Figura 3.7: Evolución temporal del precio del petróleo WTI y los principales tipos de cambio para el período del 4 de Enero del 2000 al 5 de Mayo de 2012.



análisis de correlación cruzada sin tendencia a las series de rentabilidades del petróleo WTI y de las tipos de cambio USD. Estimamos el ρ_{DCCA} para cada par de variables compuestas (precio de petróleo WTI y tipos de cambio para diferentes países) para cada uno de los dos períodos muestrales que hemos considerado. Los resultados para la correlación entre el precio del petróleo WTI y los tipos de cambio para diferentes escalas de tiempo se muestran en la Figura 3.8. Los símbolos cuadrados y rojos corresponden al coeficiente de correlación para el periodo anterior al 15 de Julio de 2008 (pre-crisis), y los símbolos redondos y azules indican el coeficiente de correlación para el periodo

Cuadro 3.1: Estadística descriptiva para las rentabilidades diarias del petróleo WTI y los tipos de cambio durante el período del 4 de Enero de 2000 hasta el 5 de Mayo de 2012.

| | Media (%) | Desv. est. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | ARCH-LM ¹ | LB ¹ | Corr. con WTI |
|---|--------------|-------------------|-------|-------|-----------------|----------------------|-----------------|------------------|
| Panel A: 4 de Enero 2000 al 15 Julio 2008 | | | | | | | | |
| WTI | 0.081 | 2.42 | -0.52 | 6.82 | 0.00 | 0.01 | 0.15 | — |
| AUD | -0.019 | 0.71 | 0.59 | 6.91 | 0.00 | 0.00 | 0.18 | -0.11 |
| CAD | -0.017 | 0.51 | 0.05 | 4.20 | 0.00 | 0.00 | 0.16 | -0.12 |
| EUR | -0.021 | 0.60 | -0.04 | 4.04 | 0.00 | 0.01 | 0.19 | -0.08 |
| GBP | -0.009 | 0.52 | 0.06 | 3.63 | 0.00 | 0.00 | 0.21 | -0.07 |
| JPY | -0.000 | 0.61 | -0.32 | 4.64 | 0.00 | 0.01 | 0.19 | -0.06 |
| NOK | -0.021 | 0.65 | 0.13 | 3.79 | 0.00 | 0.00 | 0.22 | -0.12 |
| MXN | 0.004 | 0.46 | 0.11 | 5.49 | 0.00 | 0.00 | 0.18 | -0.03 |
| TWEXB | -0.014 | 0.42 | 0.12 | 3.57 | 0.00 | 0.00 | 0.19 | -0.12 |
| | Media (%) | Desv. est. (%) | Asim. | Curt. | JB ¹ | ARCH-LM ¹ | LB ¹ | Corr. con WTI |
| Panel B: 16 Julio 2008 al 5 Mayo 2012 | | | | | | | | |
| WTI | -0.066 | 3.23 | 0.24 | 7.60 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | — |
| AUD | -0.000 | 1.29 | 0.79 | 11.34 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.45 |
| CAD | 0.005 | 0.91 | -0.13 | 6.34 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.45 |
| EUR | 0.023 | 0.85 | -0.14 | 5.56 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.32 |
| GBP | 0.029 | 0.83 | 0.35 | 8.45 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.30 |
| JPY | -0.035 | 0.88 | -0.36 | 7.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.22 |
| NOK | 0.019 | 1.17 | -0.13 | 6.06 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.44 |
| MXN | 0.029 | 0.96 | 0.66 | 13.33 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.37 |
| TWEXB | 0.003 | 0.65 | -0.54 | 6.60 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.39 |

¹Un p-valor < 0.05 indica el rechazo de la hipótesis nula para los tests estadísticos asociados al nivel de 5 %.

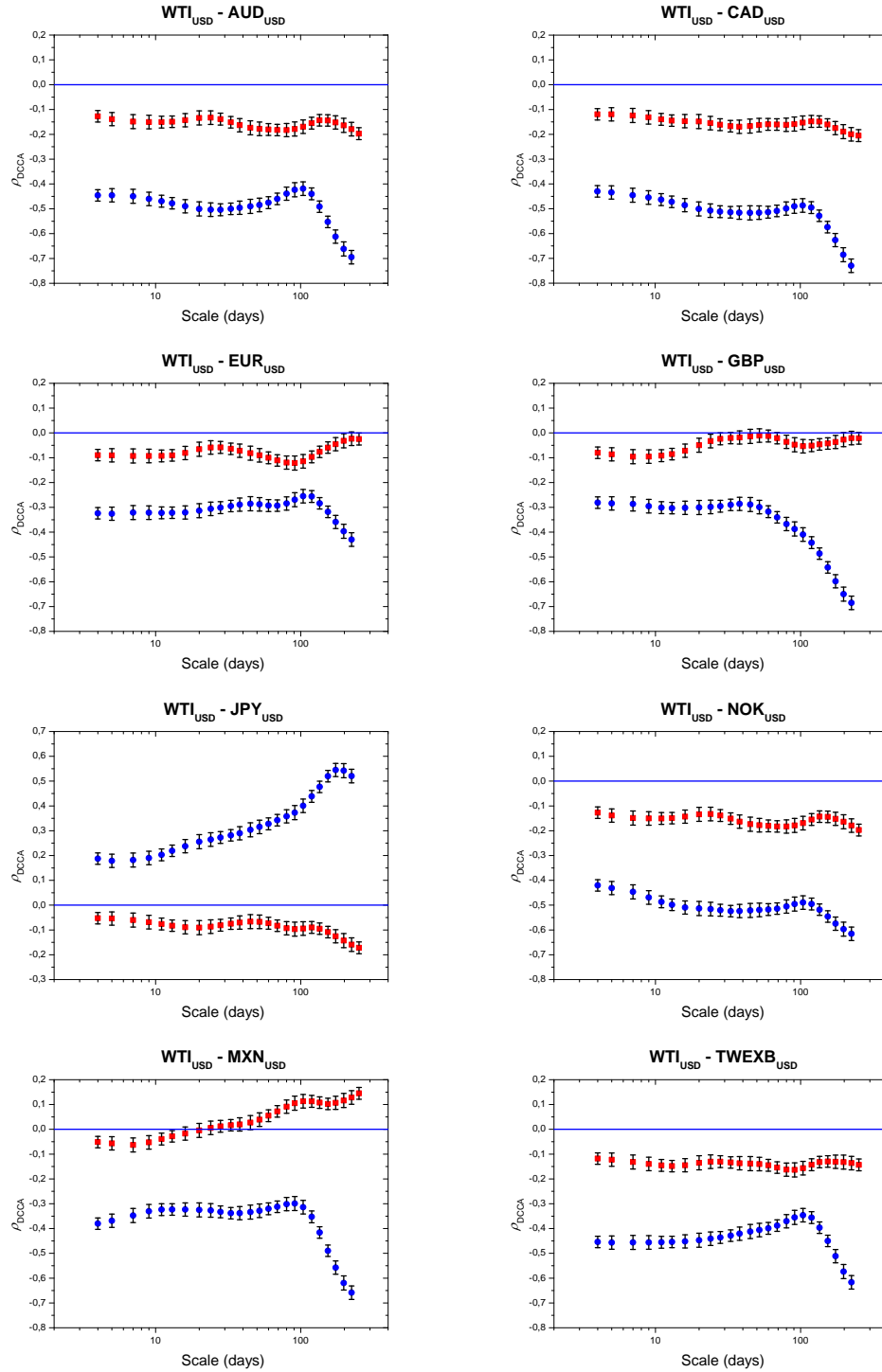
Nota: Datos diarios para el período del 4 de Enero del 2000 al 5 de Mayo de 2012. Los datos fueron divididos en dos muestras: (a) Panel A: 4 de Enero del 2000 al 15 de Julio 2008 (antes de la crisis financiera) y (b) Panel B: 16 Julio 2008 al 5 de Mayo del 2012 (después del inicio de la crisis financiera). La tabla informa las estadísticas básicas para las series de rentabilidades, incluyendo media, desviación standard (Desv.est.), asimetría (Asim.), y curtosis (Curt.). ARCH se refiere al teste estadístico para la heterocedasticidad condicional de orden 10. LB se refiere al estadístico Ljung Box para autocorrelación de orden 10. JB se refiere al estadístico Jarque-Bera para detectar normalidad. Corr. se refiere al coeficiente de correlación.

de crisis. Las líneas verticales indican los límites superior e inferior para el intervalo de confianza del 95 %⁵.

El coeficiente de correlación ρ_{DCCA} ofrece dos patrones diferentes sobre la dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio para los dos periodos estudiados: (a) En general, existe una dependencia débil y negativa entre el precio del petróleo y los tipos de cambio en el periodo pre-crisis, con

⁵El intervalo de confianza corresponde a $2 * \sigma^2 \rho_{DCCA}$ en cada caja.

Figura 3.8: Coeficiente de correlación cruzada sin tendencia para el precio del petróleo WTI y los tipos de cambio USD.



correlaciones aproximadas de -0.1 en las diferentes escalas de tiempo, con la excepción de la relación entre los precio del WTI y el peso mexicano (MXN): para pequeñas escalas, las correlaciones son negativas y cercanas a cero, mientras que hay una correlación débil positiva para las escalas de tiempo más altas.

(b) Durante el periodo de crisis, en general, existe una dependencia negativa y significativa entre el precio del petróleo y los tipos de cambio en pequeñas escalas de tiempo que aumentan a partir de los cien días en adelante, aproximadamente. Un comportamiento diferente fue observado con la relación entre el yen japonés (JPY) y el precio del WTI, la cual es positiva y aumenta con las diferentes escalas de tiempo.

La disminución significativa (o aumento para el JPY) en la correlación durante el periodo de crisis para todas las escalas temporales nos permitió rechazar la hipótesis nula en la ecuación (3.29), de esta forma, apoyamos el argumento del contagio financiero y la interdependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio USD con la llegada de la crisis financiera. El resultado es consistente con la evidencia empírica de co-movimiento entre el precio petróleo y los tipos de cambio proporcionadas por funciones cópula reportadas en [Reboredo \(2011\)](#).

3.5.5. Discusión

Nuestros resultados sobre la dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio USD usando el ρ_{DCCA} tienen implicaciones políticas y financieras relevantes para los intereses de sectores de la política económica, investigadores y *traders* que merecen ser discutidas.

En primer lugar, la evidencia débil de dependencia negativa entre el petróleo y el valor del dólar USD hasta mediados de 2008, indica que no es posible explicar el aumento del precio del petróleo en base a la depreciación del dólar USD. Las causas que empujaron hacia arriba el precio del petróleo deben ser investigadas estudiando el comportamiento intrínseco de la oferta y demanda en los mercados internacionales del petróleo. Asimismo, la capacidad predictiva de los tipos de cambio sobre el precio del petróleo es débil. Contrariamente, con el inicio de la crisis financiera, el dólar y el precio del petróleo se mueven conjuntamente con una mayor intensidad, por lo que el dólar desempeña un papel más activo en el movimiento del precio del petróleo y su capacidad de previsión también aumenta. Nuestros resultados indican que estos efectos son distintivos para escalas de tiempo diferentes: para las escalas de tiempo mayores a 100 días, estos efectos son más intensos, por lo que a largo plazo, el petróleo y el valor del dólar USD están más estrechamente vinculados.

En segundo lugar, nuestros resultados indican que, en el período entre 2000 y mediados de 2008, los países importadores de petróleo, fuera de Estados Unidos, que sufren presiones inflacionarias derivadas del precio del petróleo tendrían que haber utilizado activamente la política monetaria para controlar

esas presiones, dado que no pudieron ser compensados parcialmente por la depreciación del dólar USD. Sin embargo, en el periodo de crisis financiera, la evidencia de una dependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio para diferentes escalas temporales sugiere que el uso de una política monetaria para controlar las presiones inflacionarias del petróleo podría ser más pasiva, dado que los efectos inflacionarios serían parcialmente compensados por la depreciación de la moneda extranjera, sobre todo para las mayores escalas de tiempo.

En tercer lugar, nuestros resultados también tienen implicaciones para las políticas fiscales y monetarias de los países exportadores de petróleo. Para aquellos gobiernos interesados en aislar el gasto gubernamental de la volatilidad del precio del petróleo, nuestros resultados indican que antes de mediados de 2008 el gasto del gobierno habría estado expuesto a la volatilidad de los ingresos del petróleo ya que la volatilidad de los precios no podía ser diversificada por los movimientos del dólar USD. Sin embargo, el aumento de la dependencia entre los precios del petróleo y los tipos de cambio con el inicio de la crisis, implica que un *shock* positivo en el precio del petróleo podía ser parcialmente compensado por la depreciación del dólar y viceversa. Por otro lado, la interdependencia entre los mercados del petróleo y de los tipos de cambio tiene implicaciones para los países exportadores de petróleo que vinculan sus monedas al dólar. El poder adquisitivo de estos países con respecto a los países importadores de petróleo aumenta (disminuye) cuando los precios del petróleo suben (bajan) si los precios del petróleo - en dólares - no se mueven en conjunto con los tipos de cambio. Por el contrario, la eficacia de la política monetaria de vinculación es más restringida, dado que algunos de los beneficios de un aumento en el precio del petróleo serán absorbidos por la depreciación del dólar, si bien el efecto de la volatilidad del precio del petróleo sobre las fluctuaciones del poder adquisitivo de petróleo será amortizado.

Por último, nuestros resultados también tienen implicaciones importantes para la gestión del riesgo y la valoración de activos en los mercados del petróleo y los tipos de cambio al contado y de derivados. Las evidencias de cambios en la dependencia a diferentes escalas de tiempo, principalmente con el inicio de la crisis financiera, indican que algunas de las medidas de riesgo financiero, como el *value-at-risk* o el *expected shortfall*, tendrían valores diferentes dependiendo del horizonte temporal del inversor dado que el grado de dependencia entre el petróleo y dólar USD cambia significativamente: el *value-at-risk* disminuye a medida que se amplía la escala temporal. Del mismo modo, el riesgo de cartera varía en escalas de tiempo diferentes, ya que la capacidad de predicción de los

tipos de cambio es mayor para las escalas de tiempo más grandes que para las más pequeñas. Las implicaciones de nuestros resultados de dependencia variable con el tiempo, también son importantes para el riesgo de mercado al que se enfrenta un país importador (exportador) de petróleo a partir de un *shock* positivo (negativo) del precio del petróleo que es diferente en ambos períodos: el dólar USD tiene un efecto de diversificación mucho más fuerte, que aumenta con la escala temporal, en el periodo post-julio 2008 que en el periodo pre-julio 2008.

3.5.6. Conclusiones

Hemos analizado la dependencia entre el precio del petróleo WTI y los tipos de cambio usando el análisis de correlación cruzada sin tendencia con el fin de identificar las diferencias y los cambios en la relación entre precio del petróleo y tipos de cambio para diferentes escalas de tiempo. Hemos mostrado que la propiedad de descomposición a diferentes escalas de tiempo del ρ_{DCCA} es útil para revelar la existencia de contagio y de interdependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio durante la crisis financiera, ya que el análisis de correlación aplicado sobre una base de escalas temporales, proporciona intervalos de confianza fiables en la correlación estimada para los periodos de pre y post crisis financiera.

Nuestros resultados principales para un conjunto amplio de monedas y el precio del petróleo WTI durante el periodo del 4 de enero de 2000 al 5 de mayo de 2012 se pueden resumir de la siguiente forma. En primer lugar, en el periodo pre-crisis, los cambios en el precio del petróleo tuvieron un efecto débil y negativo sobre los tipos de cambio, y viceversa. En segundo lugar, existe evidencia de contagio y de interdependencia (negativa) entre el precio del petróleo y los tipos de cambio desde el comienzo de la crisis financiera mundial.

Las implicaciones de nuestros resultados con respecto a la interdependencia entre el precio del petróleo y los tipos de cambio son importantes para la gestión de la política fiscal en los países exportadores de petróleo, para las políticas monetarias cuyo objetivo es controlar las presiones inflacionarias del petróleo, para el aumento del poder adquisitivo de los países exportadores de petróleo emergentes con monedas vinculadas al dólar USD, y por último, para la gestión de riesgo y la valoración de activos relacionados con el petróleo.

Parte III

Aplicación de la teoría de valores extremos

Capítulo 4

Teoría de los valores extremos

4.1. Introducción

Este capítulo presenta los conceptos y aplicaciones de la Teoría de los Valores Extremos (TVE) considerados en esta tesis. La TVE proporciona un fundamento teórico robusto sobre cómo construir modelos estadísticos que describen el comportamiento de eventos extremos (Coles, 2001; Embrechts et al., 1997), lo que en nuestro caso se aplica para la obtención de rentabilidades que se encuentren en la cola de la distribución.

En términos generales, existen dos métodos para modelizar los valores extremos:

- Método de máximos por bloques: Proporciona modelos para las observaciones más grandes de muestras grandes de observaciones idénticamente distribuidas. Este método es sensible a la elección de los periodos temporales que definen los bloques.
- Método *Peaks Over Threshold* (POT): Proporciona modelos para las observaciones grandes que exceden un umbral específico. Los modelos POT generalmente resultan más útiles en aplicaciones prácticas debido a su mayor eficiencia al tratar con un número limitado de datos, como es el caso de los valores extremos. Dentro de esta clase de modelos existen dos tipos de análisis: los modelos no-paramétricos contruidos en torno al estimador de Hill (Tsay, 2010) y los modelos paramétricos basados en la distribución de Pareto generalizada (GPD). Nos inclinamos por la primera por razones de simplicidad, tanto en la exposición como en el cálculo de la misma.

A continuación, presentamos los conceptos teóricos fundamentales que se utilizan para los dos métodos anteriores. Cuando modelizamos el máximo de

una *v.a.*, la EVT proporciona un resultado similar al del Teorema central del límite para sumas de *v.a.* pero aplicado sobre máximos de los bloques definidos. Es el llamado teorema de Fisher-Tippett.

4.2. Conceptos iniciales

Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es designada por F , que suponemos continua. Definimos por x_F el límite superior¹ de los valores de X . Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas a la variable aleatoria X . Definimos.

$$M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad (4.1)$$

y designamos por F_{M_n} la función de distribución de variable aleatoria M_n . Así, a modo de ejemplo, si X_1, X_2, \dots fuesen las rentabilidades diarias de un activo financiero, entonces M_n será la rentabilidad máxima entre n rentabilidades diarias consecutivas.

La Teoría de los Valores Extremos clásica estudia la existencia y las propiedades de la distribución límite de las variables aleatorias $a_n + b_n \cdot M_n$, $n \in N$ para la elección apropiada de secuencias numéricas $a_n, n \in N$ y $b_n, n \in N$ ². Para que podamos formular el resultado sobre la convergencia de los máximos necesitamos de la definición dada a seguir.

Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$, definimos una función de distribución H_γ como sigue:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\}, & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\}, & \text{si } \gamma = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Para x en la región $\{x : 1 + \gamma x > 0\}$, mientras que para x fuera de esta región H_γ debe ser completada por 0 o por 1 para que satisfaga las condiciones de una función de distribución. La familia $\{H_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$ es denominada familia de distribuciones generalizadas de valores extremos (GEV). Este nombre se justifica por el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *Las propiedades (1) y (2) presentadas a continuación son equivalentes: si una de ellas es válida entonces la otra también lo es.*

¹ x_F es el menor donde F alcanza 1, caso x_F sea finito y que $F(x) < 1$ para todo x caso $x_F = \infty$.

²Se puede demostrar que, dependiendo de las propiedades de F y de la elección de x , la secuencia $F_{M_n}(x)$ converge cuando $n \rightarrow \infty$, a 1 o a 0, es decir: converge a una función de distribución degenerada. Esta convergencia no da informaciones que permitan concluir sobre la forma aproximada de F_{M_n} para un n grande. De ahí el interés en el límite de $a_n + b_n \cdot M_n$.

1. Existen dos secuencias a_n y b_n , y tres números reales γ, ν y δ tales que $F_{a_n+b_nM_n}(x), x \in \mathbb{R}$, la función de distribución de la variable aleatoria $a_n + b_nM_n$, converge, conforme $n \rightarrow \infty$, la función $H_\gamma(\nu + \delta x)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Existe un número real γ y una función $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{u \leq y \leq x_F} \left| \mathbb{P}\left[\frac{X-u}{\sigma(u)} \leq y | X > u\right] - G_\gamma(y) \right| = 0 \quad (4.3)$$

donde

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - \exp^{-y}, & \text{si } \gamma = 0 \\ 1 - (1 + \gamma y)^{-1/\gamma}, & \text{si } \gamma \neq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

para y de la región $\{y : y \geq 0 \text{ e } y \leq -1/\gamma\}$, caso $\gamma < 0$, y de la región $\{y : y > 0\}$, caso $\gamma > 0$; fuera de estas regiones G_γ debe ser complementada por 0 o por 1 para satisfacer las condiciones de una función de distribución.

La función de distribución G_γ en (4.4) es llamada de Distribución Generalizada de Pareto (GPD).

Vale la pena señalar que la TVE afirma que existe la siguiente dicotomía: para cualquier elección de la secuencia a_n y b_n , la secuencia de funciones $F_{a_n+b_nM_n}(x), x \in \mathbb{R}$, no converge a ninguna función de distribución que no sea la degenerada, o bien existen secuencias a_n y b_n tales que se produce la convergencia a una función de distribución no degenerada y en este caso la función límite es del tipo H_γ . Nótese que decir que una función es de tipo H_γ implica decir que esta función puede obtenerse a partir H_γ por transformación lineal de su argumento: $x \rightarrow \nu + \delta x$, para números apropiados ν y δ . Nótese también que la TVE estudia el tipo de distribución límite de la secuencia $F_{a_n+b_nM_n}(x), x \in \mathbb{R}$. Eso tiene sus fundamentos, si bien no serán discutidas en este capítulo³.

Existen diversas formas de condiciones que garanticen la convergencia de los máximos. Una de ellas es (2), la cual no es solo una condición suficiente, sino también necesaria.

El parámetro γ es llamado de índice de la cola para la GPD, y en caso de que haya convergencia en (4.4), también para la distribución de X . Nos referiremos a este parámetro como el índice de cola también en el ámbito de la GEV, es decir, para H_γ . Aunque en este contexto se determina no sólo la

³Para más información véase, (Coles, 2001; Embrechts et al., 1997).

cola, si no que también la distribución completa del límite de los máximo, la elección se justifica por la equivalencia entre (1) y (2) como según lo declarado por el teorema anterior: el parámetro γ en (1) y en (2) del teorema 4.1 es el mismo. Este teorema es importante, porque nos permite comparar γ estimados por diferentes métodos. Tenemos 3 casos diferentes según el valor de γ :

- Una GPD con $\gamma > 0$ es llamada función de distribución de Pareto. Si la convergencia en (4.4) ocurre para $\gamma > 0$ entonces la variable aleatoria X tiene cola con decaimiento dado por una potencia, o, en un lenguaje mas coloquial, “cola pesada”. Este carácter de decaimiento hace que los momentos absolutos de X no existan a partir de un cierto orden, lo que puede ser calculado directamente en función de γ . El teorema 4.1 dice que (2) ocurre para un $\gamma > 0$ si y sólo si hay secuencias a_n y b_n tales que $F_{a_n+b_nM_n}$ converge a una GEV con el mismo γ . La distribución GEV de parámetro $\gamma > 0$ es una distribución de tipo de Fréchet con el parámetro $\alpha = 1/\gamma$. Recordamos que la distribución de Fréchet de parámetro α es la función $\Phi_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, que asume valor $\exp\{-x^{-\alpha}\}$, en caso de que $x > 0$, y valor 0, en caso contrario; el parámetro α de la distribución de Fréchet puede asumir solamente valores positivos.
- Una GPD con $\gamma = 0$ es la función de distribución exponencial de parámetro 1. Si la convergencia en (4.4) ocurre para $\gamma = 0$, entonces la variable aleatoria X posee cola con decaimiento exponencial, o “cola delgada”. Si no tomamos en cuenta la cola izquierda, que a priori se puede comportar distintamente de la cola derecha, podemos decir que el decaimiento exponencial permite que existan momentos absolutos de X de cualquier orden. El teorema 4.1 dice que (2) ocurre para $\gamma = 0$ si y sólo si existen secuencias a_n y b_n tales que $F_{a_n+b_nM_n}$ converge a una GEV de parámetro $\gamma = 0$. Una GEV de parámetro $\gamma = 0$ tiene el tipo de distribución Gumbel. Recordamos que la función $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$, $x \in \mathbb{R}$, es denominada distribución Gumbel.
- Una GPD con $\gamma < 0$ es una función de distribución Beta. En caso de que la condición (4.4) ocurra para $\gamma < 0$ entonces x_F es finito, esto significa que es una distribución sin cola, pero que tiene todos los momentos característicos. El teorema 4.1 dice que ocurre para $\gamma < 0$ si y sólo si existen secuencias a_n y b_n tales que $F_{a_n+b_nM_n}$ converge para una GEV de parámetro $\gamma < 0$. Una GEV de parámetro $\gamma < 0$ es una distribución Weibull de parámetro $\alpha = -1/\gamma$. Recordemos que la función $\Psi_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

que asume el valor $\exp\{-(x)^\alpha\}$, en caso de que $x < 0$, y valor 1 caso contrario es denominada distribución Weibull; su parámetro α puede asumir valores solamente positivos. Cada distribución de Weibull no tiene cola derecha. Por lo tanto, la distribución límite de los máximos no existe, lo que es coherente con el hecho de que X no tiene cola derecha.

4.3. Método de estimación de la distribución de los máximos en bloques

Sean x_1, x_2, \dots, x_N observaciones independientes de una variable aleatoria X . Sean X_1, \dots, X_n una secuencia de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas. Supongamos que queremos estimar la distribución F_{M_n} del máximo entre las variables aleatorias X_1, \dots, X_n . La solución más natural es dividir la N observaciones en bloques de tamaño n . Hallar el máximo

$$m_i := \max\{x_{(i-1)n+1}, \dots, x_{in}\}. \quad (4.5)$$

En cada i -ésimo bloque, y construir la función de distribución muestral de $m_1, \dots, m_{N/n}$. Esta función, designada por \hat{F}_{M_n} , es tomada como la estimación deseada de la F_{M_n} .

La TVE permite enriquecer las estimativa de \hat{F}_{M_n} de F_{M_n} y llevar el problema de estimación del campo de la estadística no-paramétrica al campo de la estadística paramétrica. De hecho, el teorema 4.1 afirma bajo ciertas condiciones del comportamiento de X y cuando n es lo suficientemente grande, la función de distribución $F_{a_n+b_nM_n}$ está próxima a la función H_γ con un valor apropiado del parámetro γ . Esto implica que $F_{M_n}(x), x \in \mathbb{R}$, esta próxima de la función $H_\gamma(\delta' + \nu'x), x \in \mathbb{R}$, para valores apropiados de δ', ν' y γ . Destacamos que ν y δ de (1) en el teorema 4.1 deben ser ajustados debido a la presencia de a_n y b_n , lo que nos hace escribir ν' y δ' . El método de máximos por bloques de la TVE consiste en usar métodos de estadística paramétrica para obtener estimaciones de $\hat{\gamma}, \hat{\nu}'$ y $\hat{\delta}'$ en base a la muestra $m_1, \dots, m_{N/n}$. El método de máximos por bloques resulta en la aproximación de la función de distribución desconocida F_{M_n} por $H_{\hat{\gamma}}(\hat{\delta}' + \hat{\nu}'x), x \in \mathbb{R}$, que es una función del tipo GEV.

4.4. Método de estimación de la colas

Sea F la función de distribución de la variable aleatoria X . Veamos ahora el problema de descubrir el comportamiento asintótico de $F(x), x \in \mathbb{R}$, conforme

$x \rightarrow \infty$, partiendo de las observaciones x_1, \dots, x_N independientes de la variable aleatoria X^4 . Se puede decir que este es el problema de estimación o reconstrucción de la cola derecha de F^5 . La solución que se propone está basada en la suposición de que la propiedad (2) del teorema 4.1 es correcta.

Para $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ definimos la función $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ por

$$G_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = G_{\gamma} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

La propiedad (2) del teorema 4.1 implica que para un u suficientemente grande, $F(x)$, con $x \geq u$ está próxima a la función

$$\mathbb{P}[X > u | G_{\gamma, u, \sigma(u)}(x) + \mathbb{P}X \leq u], \quad x \geq u. \quad (4.7)$$

Esta aproximación es la base para reconstituir la cola de F a partir de las observaciones x_1, \dots, x_N . Esto sugiere de modo natural el siguiente algoritmo de aproximación de la cola derecha, denominado método *Peaks Over the Threshold* (POT):

1. ordenar la muestra x_1, \dots, x_N en orden decreciente y escoger los k mayores valores: $x_{n,k}, x_{n,k-1}, \dots, x_{n,1}$.
2. Hacer $u = x_{n,k}$ y usar estos k valores para obtener las estimativas $\hat{\gamma}$ y $\hat{\sigma}(u)$ de γ y $\sigma(u)$; estimar $\mathbb{P}[X \leq u]$ por $\hat{F}(u)$.

El método POT ofrece la expresión (4.7) con las estimaciones $\hat{\gamma}, u, \hat{\sigma}(u)$ para los parámetros γ, u y σ , como una estimación de la cola de F a la derecha de u . Las propiedades asintóticas de esta cola son deducidas a partir de las propiedades asintóticas de la expresión usada en la aproximación.

A continuación, presentamos la terminología perteneciente al método POT que será usado en este capítulo:

- u es el umbral por encima del cual los valores que x toma son considerados como pertenecientes a la cola;
- μ es el parámetro de localización. Note que en el procedimiento descrito más arriba coincide con u ;
- γ es el índice de la cola relacionado con el parámetro de forma α ($\alpha = 1/\gamma$);

⁴Aunque no se discute en este capítulo, existe la posibilidad de relajar la suposición de independencia.

⁵Para la cola izquierda basta invertir las señales de la muestra.

- σ es el parámetro de escala;
- k es el número de estadísticas de orden utilizado en la estimativas de los parámetros.

4.5. Ley de potencias en las duraciones entre rentabilidades extremas

4.5.1. Motivación

Actualmente, la comunidad científica se ha interesado en la dinámica de los sistemas denominados complejos, cuyas partes interactúan de una forma no lineal y con la existencia de leyes de potencia como una de sus notables propiedades. Los sistemas con propiedades de escala describen casi todo en la naturaleza, a veces incluso los sistemas desordenados. Además, hay sistemas que sin tener estas características de escala descritas por las leyes de potencia son soluciones de ecuaciones funcionales del tipo $f(t) = at^\alpha$, donde la relación $f(ct) = a(ct)^\alpha = c^\alpha f(t)$ se cumple para cada constante c multiplicando el argumento de t por c , por lo que sólo se multiplica la ley de potencia original por la constante c^α . A este respecto, se dice que la función es invariante de escala. Esta propiedad hace que la ley de potencia sea determinada por su exponente, formando una especie de equivalencia entre las funciones y el mismo exponente. Estos eventos pueden tener un tipo de regularidad en la forma de la ley de potencia que es incompatible con la idea tener un comportamiento medio como escala característica, este problema se puede evitar, al admitir que la ley de potencia no es válida para toda la gama de variación de t , es decir, que las leyes de potencia a menudo se observan en las colas de las distribuciones, y no a lo largo de toda su gama. (véase, eg., Bouchaud, 2001; Gabaix, 2008, 2009; Mandelbrot, 1963, 1997; Pareto, 1897, entre otros).

En esta sección se trata de caracterizar la existencia de ley de potencia en las duraciones entre rentabilidades extremas. Las duraciones son una variable importante para el *trading* y la gestión de riesgos. Por ejemplo, la duración de tiempo entre transacciones es fundamental, siempre y cuando las duraciones indiquen falta de actividad negociadora y por lo tanto no haya información nueva que llegue al mercado. Del mismo modo, las rentabilidades extremas indican cambios relevantes en la información sobre los precios las acciones, por lo que el tiempo entre tales rentabilidades extremas pueden contener información sobre la probabilidad y el tamaño de las futuras rentabilidades extremas

que son pertinentes para la formación de estrategias de negociación y del valor de las distintas medidas de riesgo, como el VaR y el *expected shortfall*. En este contexto, contar con información sobre la duración entre dos rentabilidades extremas es de suma importancia para una adecuada gestión de inversión y gestión de riesgo. Al considerar las duraciones entre dos rentabilidades extremas, definida a través del método POT, se analiza la existencia de ley de potencia en las duraciones mediante la obtención y comparación del parámetro q llamado índice de entropía, que fue presentado por Tsallis (1988) con la idea de generalizar la entropía de Boltzmann-Gibbs⁶. Vamos a utilizar dos formas diferentes para estimar el parámetro q . El primero se lleva a cabo de una forma incondicional mediante el ajuste de las duraciones entre las rentabilidades extremas a la distribución q -Weibull. La segunda se lleva a cabo de forma condicional, utilizando el modelo autoregresivo de duración condicional para la dinámica de las duraciones (véase, eg., Bauwens y Giot, 2000; Bauwens et al., 2004a; Engle y Russell, 1998; Fernandes y Grammig, 2005, entre otros) con una distribución q -Weibull.

4.5.2. Metodología

4.5.2.1. Elección del umbral

Para contrastar la existencia de leyes de potencia en las duraciones entre rentabilidades extremas, en primer lugar necesitamos caracterizar una serie de valores extremos que obtenemos a partir de las rentabilidades. Para este fin usamos el modelo POT que identifica los valores extremos como aquellos que exceden un umbral u . En la metodología POT, la selección del umbral u es muy sensible: un umbral muy bajo garantiza una serie de máximos con un número mayor de observaciones, mientras que un umbral muy alto genera unos pocos extremos y por lo tanto conduce a una amplia variación en la estimación (véase, Coles, 2001; Embrechts et al., 1997).

Para seleccionar el umbral, nos apoyamos en un enfoque no paramétrico denominado de estimador de Hill, que es aplicable para las distribuciones que pertenecen al dominio de máxima de atracción (MDA) de la distribución Fréchet. Dado que nuestras rentabilidades extremas no rechazan la hipótesis de que pertenecen a la distribución Fréchet aplicamos el estimador de Hill directamente a las rentabilidades negativas $\{r_t\}_{t=1}^T$. Por lo tanto, no hay necesidad

⁶La entropía de Boltzmann-Gibbs es el número de microestados compatibles con un macroestado dado, calculada a través del logaritmo natural de dicho número, multiplicado por la constante de Boltzmann k .

de considerar sub-muestras. Denotamos las estadísticas de orden de la muestra como:

$$r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}.$$

Sea q un entero positivo. El estimador se define como:

$$\xi_{Hill}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [\ln(r_{(T-i+1)}) - \ln(r_{(T-k)})], \quad (4.8)$$

donde el argumento (k) es usado para enfatizar que la estimación depende de k . En la práctica, una forma de obtener el estimador de Hill es graficar $\xi_{Hill}(k)$ en función de k y encontrar un k adecuado en donde la estimación sea estable (Tsay, 2010). El gráfico de Hill, en la cual el estimador de Hill se grafican para diferentes valores de k , se asocia con diferentes umbrales. En otras palabras, los siguientes pares ordenados se grafican:

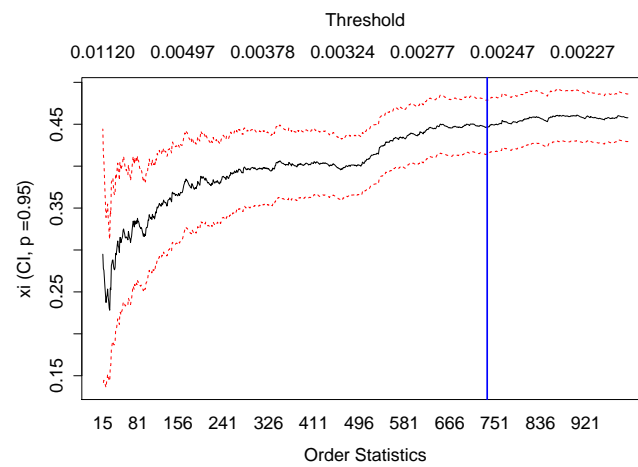
$$\{(k, \alpha_{k,T}^{Hill}) : k = 2, 3, \dots, n\}, \quad (4.9)$$

donde el índice de cola estimado es $\alpha = \frac{1}{\xi_{Hill}(k)}$.

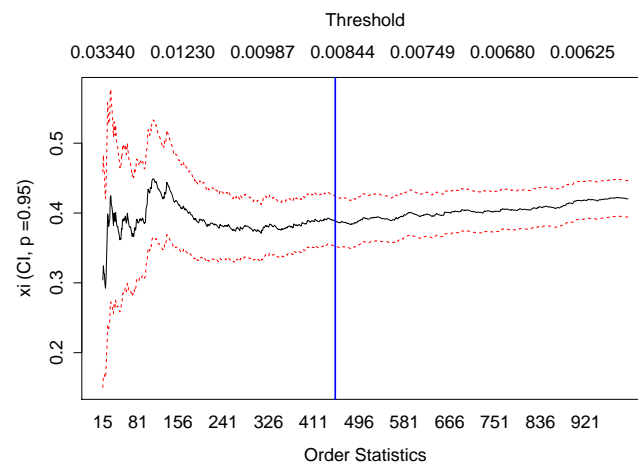
Aunque el estimador de Hill tenga algunos problemas respecto a sus propiedades para muestras finitas, ya que los resultados del estimador de Hill se basan en resultados asintóticos, cuando se usan series de períodos suficientemente largos, no genera muchos problemas (Tsay, 2010). El estimador de Hill se distribuye normalmente de manera asintótica con varianza dada por ξ^2/k .

De esta forma, para obtener las duraciones entre las rentabilidades extremas, primero caracterizamos los eventos extremos como las rentabilidades que son mayores o menores que el umbral establecido por el estimador no paramétrica de Hill. La figura 4.1 muestra el gráfico de Hill para cada una de las series analizadas en este capítulo (S&P 500, DAX e IBEX-35). Dado el umbral estimado, calculamos cinco tipos de duraciones para cada índice: (i) duraciones entre rentabilidades extremas absolutas, (ii) duraciones entre rentabilidades extremas positivas, (iii) duraciones entre rentabilidades extremas negativas, (iv) duraciones entre rentabilidades extremas positivas seguidas de una negativa y (v) duraciones entre rentabilidades extremas negativas seguidas de una positiva.

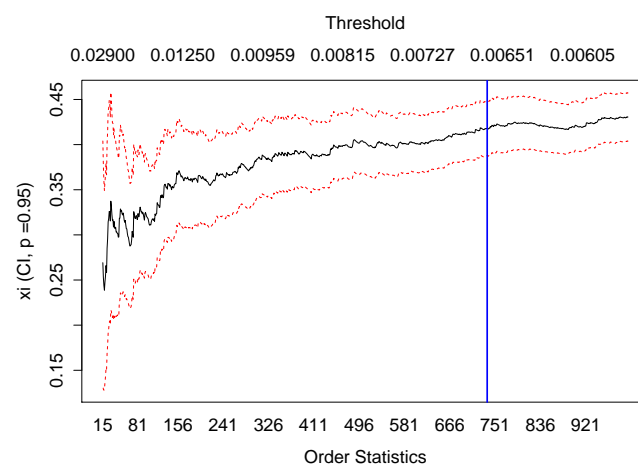
Figura 4.1: El gráfico de Hill y sus respectivos umbrales.



Panel A: Índice S&P 500



Panel B: Índice DAX



Panel C: Índice IBEX-35

4.5.2.2. Distribuciones de los tiempos de espera entre rentabilidades extremas

Para conseguir uno de nuestros objetivos, la función de supervivencia representa el concepto estadístico central. Nuestro deseo es estimar el índice de entropía q de forma que, a través de este índice poder caracterizar la existencia de leyes de potencia en las duraciones entre rentabilidades extremas. Siguiendo los conceptos de Cox y Cox (2006); Greene (2008); Kiefer (1988), tenemos que $T > 0$ es una variable aleatoria que mide el tiempo hasta la ocurrencia de un determinado suceso. La función de supervivencia especifica la probabilidad acumulada de que el suceso objeto de estudio tenga lugar después de t . En otras palabras, la probabilidad de que el individuo “sobreviva” hasta t , dado que no ha “muerto” hasta entonces.

Para obtener información más precisa de la dependencia funcional de $p(x)$ en x , trabajamos con un método que obtiene directamente las distribuciones integradas $P_h(x > X)$ y $\bar{P}_h(x > X)$ definidos como:

$$P_h(x > X) = \int_X^\infty p(x)dx, \quad (4.10)$$

$$\bar{P}_h(x > X) = \frac{1}{x} \int_X^\infty p(x)dx. \quad (4.11)$$

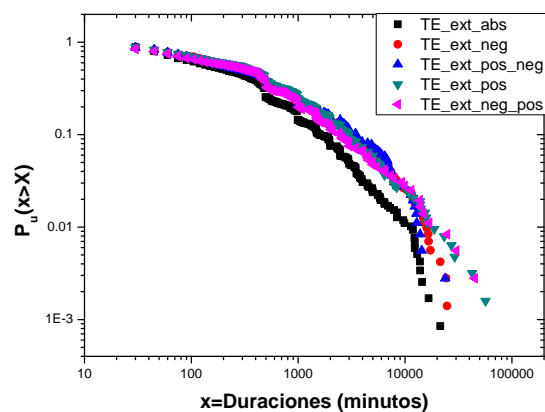
La ventaja de este método reside en el hecho de que no requiere la utilización de histogramas. Aunque las dos probabilidades puedan mostrar un comportamiento de ley de potencia, $P_h(x > X)$ ($\bar{P}_h(x > X)$) es más adecuada ya que puede proporcionar los valores correctos de los exponentes de la ley de potencia. La figura 4.2 muestra las distribuciones de cada una de las series analizadas en esta sección.

Después de obtener las distribuciones, nuestro segundo deseo es la función de densidad acumulada de las duraciones, que caracteriza la distribución de una duración variable empezando por un estado inicial 0, hasta un periodo t como sigue:

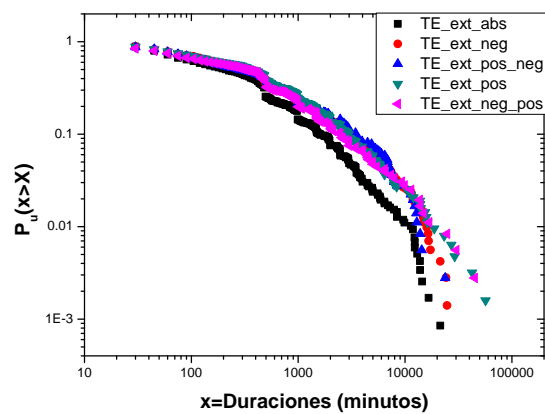
$$P(t \leq T) = F(t) = \int_0^t f(t)dt. \quad (4.12)$$

Supongamos, que el tiempo de fallo T es una variable aleatoria continua con función de distribución F y función de densidad f . Se define a continuación una serie de funciones que, aunque desde un punto de vista matemático dan especificaciones equivalentes de la distribución de T , permiten destacar aspectos diferentes de la distribución de T . La función más elemental es la

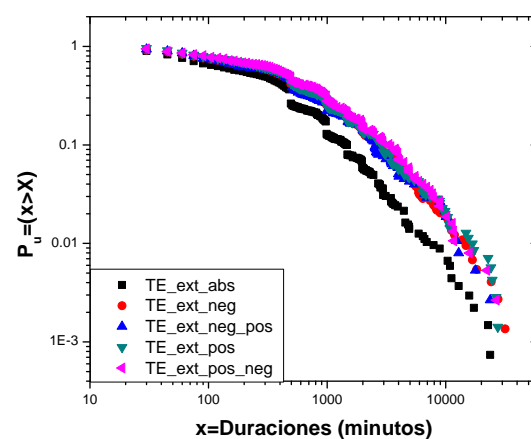
Figura 4.2: Distribución de las duraciones para los diferentes tiempos de espera.



Panel A: Índice S&P 500



Panel B: Índice DAX



Panel C: Índice IBEX-35

función de supervivencia, definida por:

$$R(t) = P(T > t). \quad (4.13)$$

Se sabe que la función de supervivencia es la probabilidad incondicional del tiempo de supervivencia t , *i.e.*, la probabilidad de que ningún evento ocurra hasta t . En otras palabras, el valor de la función de supervivencia en el tiempo t es igual a la probabilidad de que la rentabilidad sea extrema (fallo) con posterioridad al tiempo t . Es, por tanto, el complemento a 1 de la función de distribución, esto es:

$$R(t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(x)dx, \quad (4.14)$$

donde $f(t)$ denota la densidad correspondiente a $F(t)$. Entonces:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -f(t). \quad (4.15)$$

La función de supervivencia proporciona una sencilla descripción de la progresión temporal de un grupo de rentabilidades hacia el fallo o para comparar a este respecto diferentes grupos entre sí (rentabilidades positivas o negativas).

La función de riesgo es la función dada por la probabilidad de un evento (“rentabilidad extrema”) dentro del intervalo $[t, t + \Delta t]$ cuya supervivencia es dada hasta t , normalizado por el tamaño del intervalo Δt :

$$h(t) = \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (4.16)$$

Mas intuitivamente, $h(t)\Delta t$ sería una aproximación de la probabilidad de que una rentabilidad que no ha “fallado antes” del tiempo t lo haga en el siguiente período de tiempo de duración Δt . Notamos que la función de riesgo no es una probabilidad y puede tener valores por encima de 1.

Sea $h(t)$ alguna función de riesgo. La función de riesgo acumulada correspondiente es dada por:

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx. \quad (4.17)$$

En este capítulo usamos la generalización de la distribución Weibull (Ecuación (4.18)) llamada de q -Weibull (Costa et al., 2006; Picoli et al., 2003; Vuorenmaa, 2006) en función de la capacidad que esta función tiene de captar tanto el formato de bajada como el de subida de la función de riesgo como un único conjunto de parámetros. El papel de la densidad de la probabilidad

Weibull se define con la expresión:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta - t_0} \left(\frac{t - t_0}{\beta - t_0} \right)^{\alpha-1} \exp \left[- \left(\frac{t - t_0}{\beta - t_0} \right)^\alpha \right], \quad (4.18)$$

con $\alpha > 0$ y $\beta - t_0 > 0$. t_0 representa el valor temporal t debajo de cual no se espera ningún evento extremo. El factor de escala de la ecuación (4.18) es representada por θ y definida por $\theta = \beta - t_0$. Para $\beta = 1$ la distribución Weibull se transforma en la distribución exponencial. La distribución q -Weibull se obtiene mediante el modelo Weibull clásico, ecuación (4.18) por la substitución de la función exponencial para un q -exponencial (Costa et al., 2006). La función q -exponential se define como:

$$\exp_q(x) = \begin{cases} (1 + (1 - q)x)^{\frac{1}{1-q}}, & \text{if } (1 + (1 - q)x) \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (4.19)$$

con $x, q \in \mathbb{R}$. Si nos restringimos al cuadrante positivo, $t \geq 0$, la función de densidad q -Weibull se puede describir como:

$$f_q(t) = (2 - q) \frac{\alpha}{\beta - t_0} \left(\frac{t - t_0}{\beta - t_0} \right)^{\alpha-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\beta - t_0} \right)^\alpha \right]. \quad (4.20)$$

El factor $(2 - q)$ y la restricción $q < 2$ son necesarios para normalizar $f_q(t)$. En el límite de $q \rightarrow 1$ la distribución Weibull habitual es reconstruida y consistente con la ecuación (4.18) donde $f_1(t)$ comienza (Picoli et al., 2003).

La función de supervivencia acumulada de la q -Weibull es:

$$R_q(t) = \int_t^\infty f_q(x) dx = 1 - F_q(t). \quad (4.21)$$

Si consideramos la probabilidad de supervivencia hasta un tiempo t , la ecuación (4.21) es definida como la función de supervivencia acumulada en el tiempo t . La función de supervivencia acumulada generalizada $R_q(t)$ es el complemento de la función de supervivencia acumulada.

$$F_q(t) = 1 - R_q(t). \quad (4.22)$$

La función de riesgo queda definida por:

$$h_q(t) \equiv \frac{f_q(t)}{R_q(t)}, \quad (4.23)$$

y su versión generalizada es definida por:

$$\begin{aligned}
h_q(t) &= \frac{(2-q)\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \left[1 - (1-q) \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]^{-1} \\
&= \frac{(2-q)\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \left[\exp_q \left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]\right]^{q-1},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

lo cual es consistente con la versión reducida de la distribución Weibull para $q \rightarrow 1$:

$$h_1(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}. \tag{4.25}$$

Los parámetros de la densidad, α, β, t_0 y q , se calculan mediante la maximización del coeficiente de determinación R^2 , y el error estándar (S.E) que se calcula usando la matriz de covarianza definida por:

$$\text{Cov} = (h^T h)^{-1}, \tag{4.26}$$

con

$$h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_q(x_1)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_q(x_1)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q(x_1)}{\partial t_0} & \frac{\partial f_q(x_1)}{\partial q} \\ \frac{\partial f_q(x_2)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_q(x_2)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q(x_2)}{\partial t_0} & \frac{\partial f_q(x_2)}{\partial q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_q(x_n)}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_q(x_n)}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q(x_n)}{\partial t_0} & \frac{\partial f_q(x_n)}{\partial q} \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

donde n es el número de muestras.

Así, el S.E es definido por:

$$\begin{bmatrix} SE_\alpha & SE_\theta & SE_{t_0} & SE_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} COV_{1,1} & COV_{2,2} & COV_{3,3} & COV_{4,4} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

4.5.2.3. El modelo q -Weibull ACD

Para el caso de los modelos dinámicos hemos encontrado que la herramienta básica para estimar las duraciones es el modelo de duración condicional auto-regresivo (ACD) de [Engle y Russell \(1998\)](#). Este modelo utiliza una idea análoga a la de los modelos ARCH-GARCH para la volatilidad ([Bollerslev, 1986](#); [Engle, 1982](#)). En su trabajo, [Engle y Russell \(1998\)](#) aplican las distribuciones exponencial y Weibull a la distribución condicional. La distribución Weibull funciona mejor empíricamente permitiendo que una función hazard disminuya monotónicamente. Sin embargo, esto tampoco es completamente

satisfactorio, ya que la función hazard es a menudo no monótona: la función hazard parece estar aumentando para duraciones muy cortas y disminuyendo para duraciones más largas (Bauwens y Veredas, 2004; Engle, 2000; Lunde, 1999) y (Gramming y Maurer, 2000). En Bauwens et al. (2004b) y Bauwens y Giot (2000) se comparan varios modelos de duración que consideran no solo las especificaciones ACD lineares y logarítmicas sino también algunas más complejas: el ACD con umbrales (Zhang et al., 2001), el modelo de duración condicional estocástica Bauwens y Veredas (2004), y el modelo de duración de volatilidad estocástica de (Ghysels et al., 2004). En el trabajo de Bauwens et al. (2004b), se concluye que un buen modelo tiene que tener una distribución condicional que sea capaz de poner mucha masa de probabilidad por lo que es recomendable el uso del modelo Burr-(log) ACD.

Para contrastar de forma incondicional la existencia de ley de potencia en las duraciones entre rentabilidades extremas seguimos el trabajo de Vuoremaa (2006) que generaliza los modelos exponencial y Weibull-ACD propuestos por Engle y Russell (1998) usando la generalización de la distribución q -Weibull como la distribución condicional, de este modo el modelo permite una función de riesgo no monótona, la cual ha sido distinguida como un hecho empírico que se tiene que tener en consideración cuando se modelan duraciones. La duración condicional x_t es dada por:

$$x_t = \Psi_t \varepsilon_t, \quad (4.29)$$

donde ε_t es ruido *i.i.d* con una distribución q -Weibull, $\Psi_t = \exp(\psi_t)$, y $t = 1, \dots, T$. Considerando que el valor esperado de ε_t esta dado por:

$$L(\alpha, q) = \frac{(2-q)\beta\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{\alpha} - 1)}{(q-1)^{\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}\alpha\Gamma(\frac{1}{q-1})}, \quad (4.30)$$

donde $\Gamma()$ es la función gama, $q \neq 1$, $\alpha > 0$ y $[1/(q-1) - 1]\alpha > 1$; el modelo de duración se puede escribir como:

$$\frac{x_t L(\alpha, q)}{\exp(\psi_t)} = \varepsilon_t, \quad (4.31)$$

y la duración condicional esperada está especificada por:

$$\psi_i = \omega + \gamma x_{i-1} + \delta \psi_{i-1}, \quad (4.32)$$

para $\omega > 0$, $\gamma \geq 0$ y $\delta \geq 0$. Esas condiciones de desigualdad garantizan que la duración condicional es positiva. El parámetro γ ajusta la cantidad de

sobredispersión, mientras que el parámetro δ ajusta la dependencia temporal. Además, $\gamma + \delta < 1$ asegura la existencia de un promedio incondicional de la duración.

La estimación de parámetros del modelo se puede obtener maximizando el producto de las T densidades de x_t , que según la ecuación (4.20) cada densidad estará dada por:

$$f(x_t) = (2 - q) \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \left(x_t \frac{L(\alpha, q)}{\exp(\psi_t)} \right)^{\alpha-1} \exp_q \left[- \left(\frac{x_t L(\alpha, q)}{\beta \exp(\psi_t)} \right)^\alpha \right]. \quad (4.33)$$

Por lo tanto, la función log-verosimilitud está dada por:

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{x} : \omega, \gamma, \delta, \alpha, q, \beta) = & \sum_{i=1}^T \{ \log(2 - q) + \log(\alpha) - \alpha \log(\beta) \\ & + (\alpha - 1)[\log(x_t) + \log(L(\alpha, q)) - \psi_t] + \frac{1}{1 - q} \log \left[1 - (1 - q) \left(\frac{x_t L(\alpha, q)}{\beta \exp(\psi_t)} \right)^\alpha \right] \}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Maximizando la ecuación (4.34), obtenemos las estimaciones de parámetros y podemos contrastar la existencia de ley de potencia en las duraciones condicionales simplemente contrastando si $q > 1$.

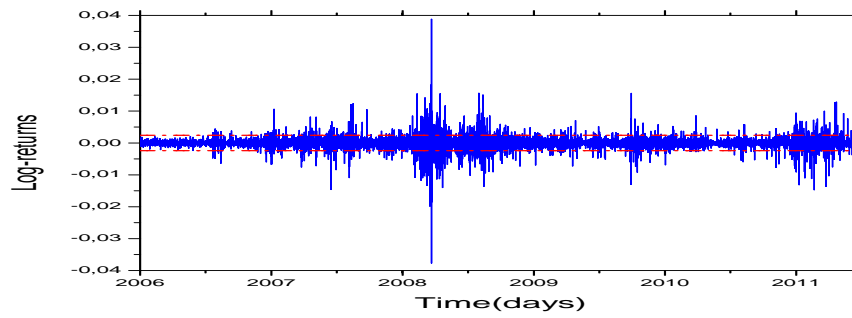
4.5.3. Datos

Hemos utilizado datos intradiarios a 15 minutos de los índices S&P 500, DAX e IBEX-35 entre el 4 de enero del año 2005 y el 20 enero del año 2012. Los datos fueron obtenidos a través de la base de datos de Olsendata (<http://www.olsendata.com>). Las rentabilidades continuas intradiarias de las acciones de los diferentes índices se calculan como la primera diferencia en logaritmo para el índice de precios de las acciones y se ha sido filtrado a través de un proceso auto-regresivo de orden 1.

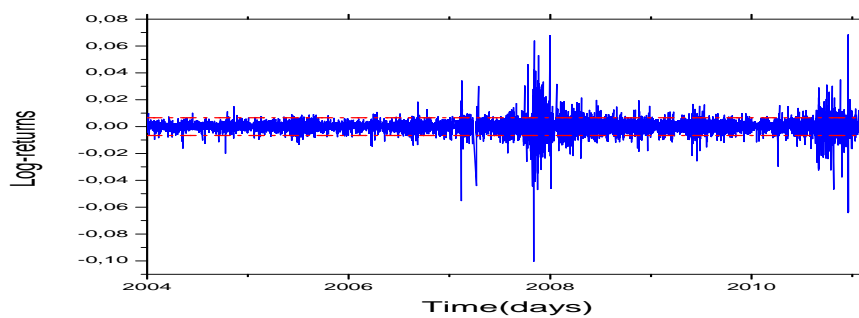
La figura 4.3 muestra las rentabilidades de cada uno de los índices analizados. Dado el valor del umbral u , determinamos las rentabilidades extremas. Éstas están irregularmente espaciadas en el tiempo y el tamaño y la intensidad de ocurrencia de estos eventos depende de los extremos anteriores observados, lo que justifica el uso de un modelo de duración condicional para caracterizar la dinámica condicional de las duraciones entre eventos extremos.

El cuadro 4.1 proporciona las estadísticas descriptivas para las duraciones entre las rentabilidades extremas. La frecuencia de ocurrencia de los eventos

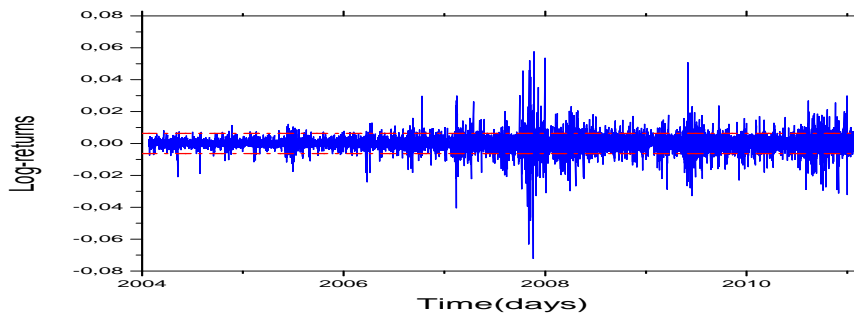
Figura 4.3: Log-rentabilidades y sus respectivos umbrales.



Panel A: Índice S&P 500



Panel B: Índice DAX



Panel C: Índice IBEX-35

extremos, independientemente de su tipo, fue mayor para el índice S&P 500 que en los índices DAX o IBEX-35. La duración media entre los extremos absolutos fue de alrededor de un día para el S&P 500, mientras que para el DAX y el IBEX-35 se amplía la longitud de tiempo hasta un día y medio. Las desviaciones típicas son grandes con respecto a la media, lo que indica una gran dispersión entre los diferentes extremos observados.

En la figura 4.4 se muestran los histogramas de los procesos de duración de los diferentes tipos de extremos, mientras que en la figura 4.5 se muestran los histogramas de las duraciones teniendo en cuenta las horas de negociación. El

Cuadro 4.1: Estadísticas descriptivas de las duraciones entre rentabilidades extremas para el período del 4 de enero del año 2005 al 20 de enero del año 2012.

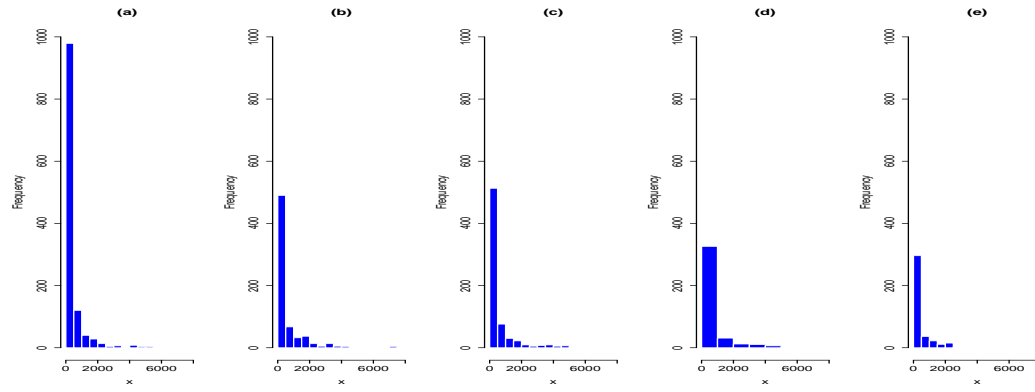
| | Media | Dev. Std | Min | Max | N. Total |
|--------------------------------------|---------|----------|-----|-------|----------|
| Panel A: S&P 500 | | | | | |
| Duraciones $_{ ext }$ | 442.62 | 1600.89 | 15 | 43905 | 1212 |
| Duraciones $_{ext(+)}$ | 800.12 | 2650.66 | 15 | 58245 | 685 |
| Duraciones $_{ext(-)}$ | 793.73 | 3070.01 | 15 | 66135 | 697 |
| Duraciones $_{ext(+ \rightarrow -)}$ | 907.46 | 3892.62 | 15 | 67875 | 394 |
| Duraciones $_{ext(- \rightarrow +)}$ | 589.22 | 1348.58 | 15 | 14700 | 394 |
| Panel B: DAX | | | | | |
| Duraciones $_{ ext }$ | 717.23 | 1740.88 | 15 | 21360 | 1178 |
| Duraciones $_{ext(+)}$ | 1340.12 | 3943.16 | 15 | 56760 | 629 |
| Duraciones $_{ext(-)}$ | 1197.18 | 2796.03 | 15 | 24720 | 713 |
| Duraciones $_{ext(+ \rightarrow -)}$ | 1218.50 | 2607.69 | 15 | 23745 | 359 |
| Duraciones $_{ext(- \rightarrow +)}$ | 1223.48 | 3723.41 | 15 | 44895 | 359 |
| Panel C: IBEX-35 | | | | | |
| Duraciones $_{ ext }$ | 640.88 | 1547.45 | 15 | 23745 | 1353 |
| Duraciones $_{ext(+)}$ | 1233.89 | 2822.50 | 15 | 27510 | 704 |
| Duraciones $_{ext(-)}$ | 1163.51 | 2655.03 | 15 | 31665 | 736 |
| Duraciones $_{ext(+ \rightarrow -)}$ | 1301.77 | 2694.79 | 15 | 27540 | 376 |
| Duraciones $_{ext(- \rightarrow +)}$ | 1104.80 | 2375.48 | 15 | 24480 | 376 |

Nota: Datos de duraciones para el período entre el 4 de enero del año 2005 al 20 de enero del año 2012. El cuadro proporciona las estadísticas básicas para las series de duraciones. Se incluyen: media (Media), desviación standard (Dev. Std), Mínimo (Min), Máximo (Max) y numero total de observaciones (N. Total).

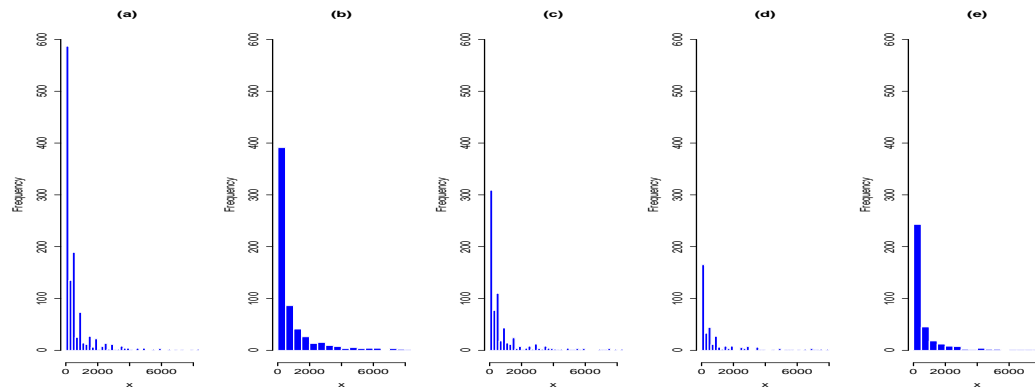
patrón intradiario de la ocurrencia de eventos extremos tiene la forma de **U** que es consistente con la forma de **U** que tiene el volumen de negociación y la forma de **U** invertida que tienen los tiempos de duración entre los datos de las transacciones, por lo que, cuanto más intenso es la negociación, más probable es que hayan precios extremos. La intensidad de las negociaciones está relacionada con el flujo de nueva información en el mercado que normalmente se produce en la apertura y el cierre del mercado.

Finalmente, la figura 4.6 muestra el box-plot para las duraciones en las diferentes horas de negociación, mostrando que no existe mucha diferencia en la duración de los eventos extremos a lo largo del día: una vez que el extremo ocurre, es más probable que sea al principio o al final del día de negociación y su tamaño es independiente de la hora en que ocurre.

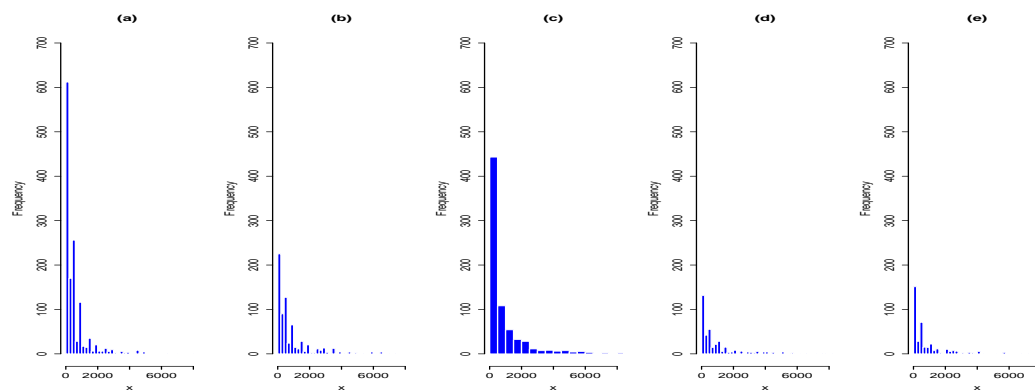
Figura 4.4: Histogramas de las duraciones entre: (a) extremos absolutos, (b) extremos₍₊₎, (c) extremos₍₋₎, (d) extremos_(+→-) y (e) extremos_(-→+).



Panel A: Duraciones S&P 500

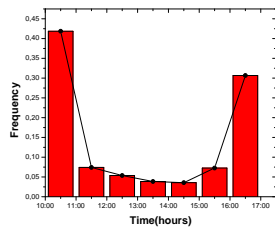


Panel B: Duraciones DAX

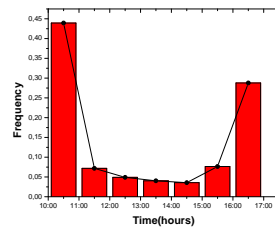


Panel C: Duraciones IBEX-35

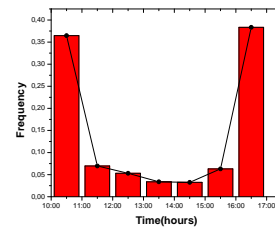
Figura 4.5: Frecuencias relativas de las rentabilidades extremas por hora



(a) Extremos Absolutos

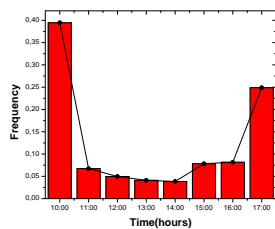


(b) Extremos Positivos

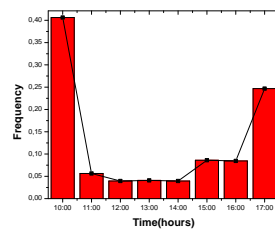


(c) Extremos Negativos

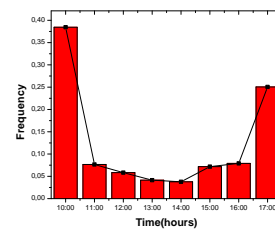
Panel A: S&P 500



(a) Extremos Absolutos

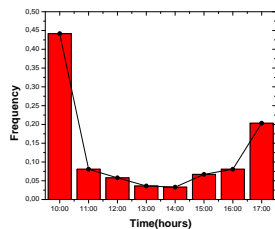


(b) Extremos Positivos

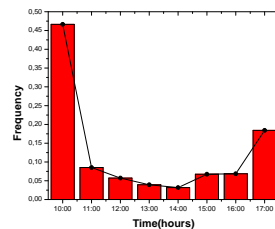


(c) Extremos Negativos

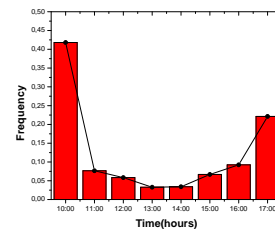
Panel B: DAX



(a) Extremos Absolutos



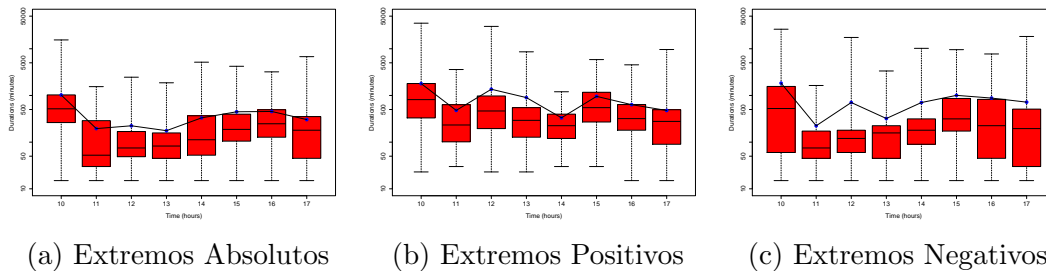
(b) Extremos Positivos



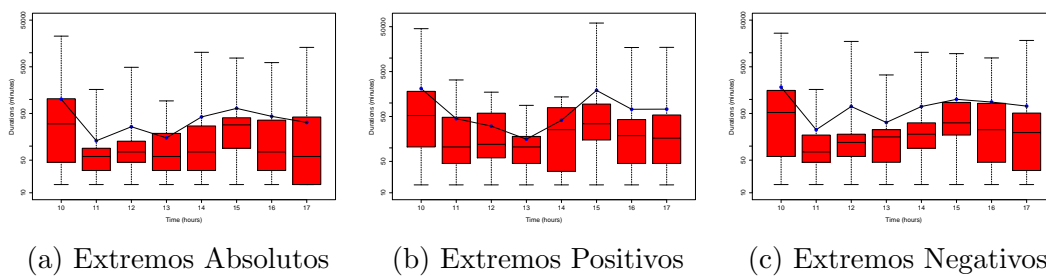
(c) Extremos Negativos

Panel C: IBEX-35

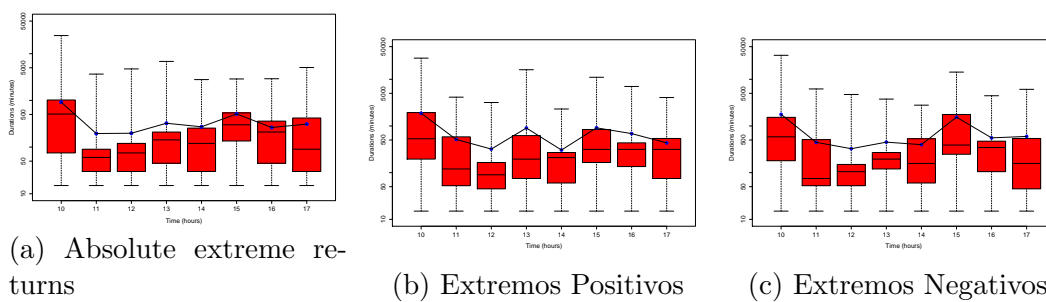
Figura 4.6: Box-plot de las duraciones entre extremos por hora del día



Panel A: S&P 500



Panel B: DAX



Panel C: IBEX-35

4.5.4. Resultados

Teniendo en cuenta las series temporales sobre las diferentes clases de duraciones entre extremos, se realizó un ajuste incondicional en una escala doble logarítmica utilizando la distribución q -Weibull. Los resultados de este ajuste se muestran gráficamente en las figuras 4.7 a la 4.11. Los resultados de los R^2 todos cercanos al 99 % enfatizan la excelente capacidad de la distribución q -Weibull para ajustar todas las duraciones entre rentabilidades extremas. El recuadro interior presenta el mismo contenido que el gráfico principal, sin embargo permite observar con mayor facilidad si el modelo se ajusta bien a los datos de la muestra: cuando éste es el caso, las muestras aparecen alineadas con la función de modelado. La observación visual de todos los gráficos indica que los modelos se adaptan bien a los datos de la muestra.

Cuadro 4.2: Parámetros estimados para el ajuste q -Weibull.

| Panel A: S&P 500 | Duraciones _{ext} | Duraciones _{ext(+)} | Duraciones _{ext(-)} | Duraciones _{ext(+→-)} | Duraciones _{ext(-→+)} |
|---------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| α | 0.64 (0.04) | 0.62 (0.05) | 0.64 (0.06) | 0.66 (0.08) | 0.59 (0.08) |
| θ | 98.6 (2.02) | 201.0 (4.14) | 135.0 (2.14) | 112.0 (3.18) | 164.0 (4.35) |
| q | 1.23 (0.05) | 1.21 (0.06) | 1.27 (0.06) | 1.32 (0.08) | 1.17 (0.09) |
| t_0 | 10.0 (1.01) | 12.4 (1.22) | 11.8 (1.33) | 12.4 (1.63) | 13.7 (0.87) |
| R^2 | 0.9902 | 0.9946 | 0.9955 | 0.9940 | 0.9934 |
| MSE | 0.0001 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0007 |
| n^o observaciones | 1212 | 685 | 697 | 394 | 394 |
| Umbral= 0.0024 | | | | | |
| Panel B: DAX | Duraciones _{ext} | Duraciones _{ext(+)} | Duraciones _{ext(-)} | Duraciones _{ext(+→-)} | Duraciones _{ext(-→+)} |
| α | 0.63 (0.04) | 0.68 (0.06) | 0.57 (0.05) | 0.55 (0.06) | 0.76 (0.01) |
| θ | 187.0 (5.01) | 253.0 (7.24) | 290.0 (5.34) | 310.0 (8.33) | 173.0 (3.04) |
| q | 1.20 (0.06) | 1.29 (0.07) | 1.19 (0.09) | 1.18 (0.01) | 1.37 (0.08) |
| t_0 | 12.1 (0.99) | 7.24 (3.6) | 12.4 (1.12) | 12.0 (1.05) | -0.78 (7.10) |
| R^2 | 0.9931 | 0.9967 | 0.9925 | 0.9933 | 0.9924 |
| MSE | 0.0006 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0011 |
| n^o observaciones | 1178 | 629 | 713 | 359 | 359 |
| Umbral= 0.0066 | | | | | |
| Panel C: IBEX-35 | Duraciones _{ext} | Duraciones _{ext(+)} | Duraciones _{ext(-)} | Duraciones _{ext(+→-)} | Duraciones _{ext(-→+)} |
| α | 0.93 (0.05) | 0.82 (0.06) | 0.74 (0.06) | 0.74 (0.09) | 0.76 (0.09) |
| θ | 180.0 (4.41) | 308.0 (6.25) | 336.0 (8.15) | 416.0 (10.05) | 293.0 (6.15) |
| q | 1.34 (0.04) | 1.31 (0.06) | 1.26 (0.06) | 1.24 (0.01) | 1.28 (0.09) |
| t_0 | -1.79 (6.10) | 10.6 (5.77) | 7.11 (4.82) | 10.0 (6.03) | 9.89 (5.96) |
| R^2 | 0.9906 | 0.9944 | 0.9967 | 0.9964 | 0.9926 |
| MSE | 0.0016 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0007 |
| n^o observaciones | 1353 | 704 | 736 | 376 | 376 |
| Umbral = 0.0063 | | | | | |

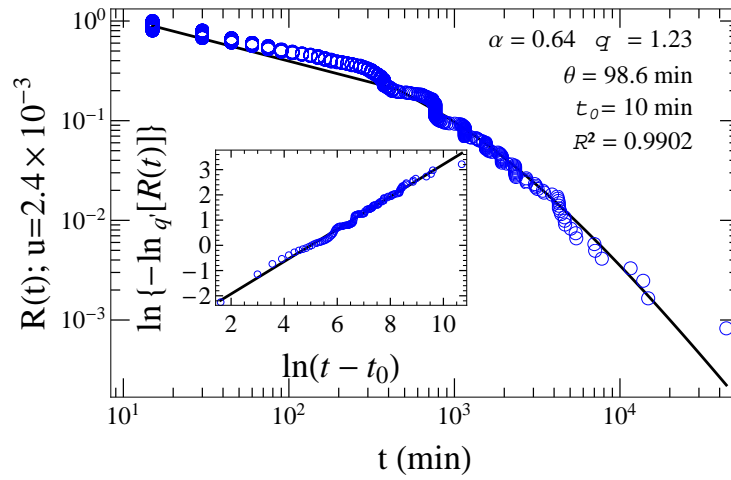
Nota: Errores standard están entre paréntesis.

El cuadro 4.2 presenta los resultados de las estimaciones de los parámetros

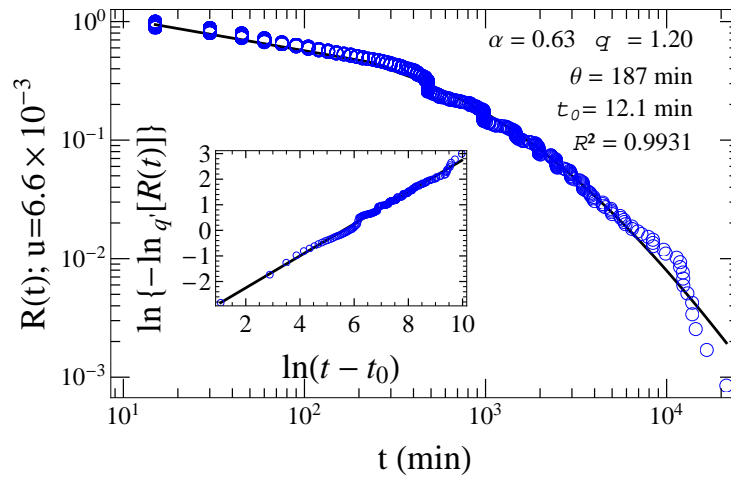
de la distribución q -Weibull, sus errores estándar, el R^2 y el error cuadrático medio (MSE) para todas las series y la duración de tiempo. La evidencia empírica indica que el parámetro de q es en todos los casos significativamente superior a 1, por consiguiente demuestra la robustez del comportamiento de ley de potencia de las duraciones entre los rendimientos extremos. Además, estas estimaciones de los parámetros implica una función de riesgo no monótona, un resultado que también se encontró en la duración entre los datos de transacción (ver, por ejemplo, [Gramming y Maurer, 2000](#)). El resultado para el MSE y el coeficiente de determinación proporcionan evidencia de la alta calidad del ajuste.

El cuadro 4.3 reporta los resultados para el modelo ACD q -Weibull para todas las duraciones de los índices considerados. Los coeficientes estimados del modelo ACD q -Weibull se obtuvieron mediante la maximización de la ecuación (4.34) teniendo en cuenta el parámetro de escala β de la q -Weibull dado por el ajuste incondicional obtenido anteriormente. Se ha encontrado cierta persistencia en las duraciones ajustadas entre las rentabilidades extremas y las duraciones ajustadas esperadas, lo que concuerda con la media de la muestra de las duraciones. Para los tres índices y todas las duraciones se ha contrastado si el proceso de innovación normalizado muestra una correlación significativa rechazándose esta hipótesis en todos los casos. En consonancia con las estimaciones incondicionales, las estimaciones empíricas para el parámetro q para las duraciones condicionales en todos los casos fue significativamente superior a 1, lo que corrobora la evidencia incondicional de la existencia de leyes de potencia en las duraciones entre rendimientos extremos. En general, se encontraron evidencias tanto condicional como incondicional de leyes de potencia en las duraciones entre las rentabilidades extremas. Hasta donde se conoce, esta es la primera vez que se reporta esta evidencia.

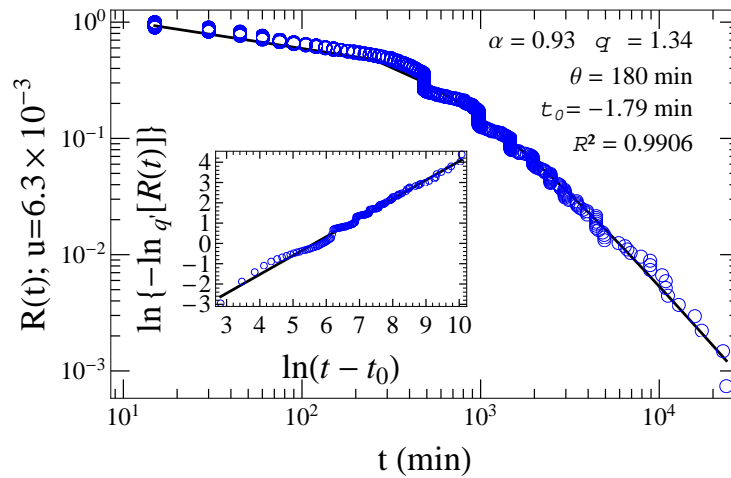
Figura 4.7: Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas absolutas.



Panel A: Log-log plot para el S&P 500

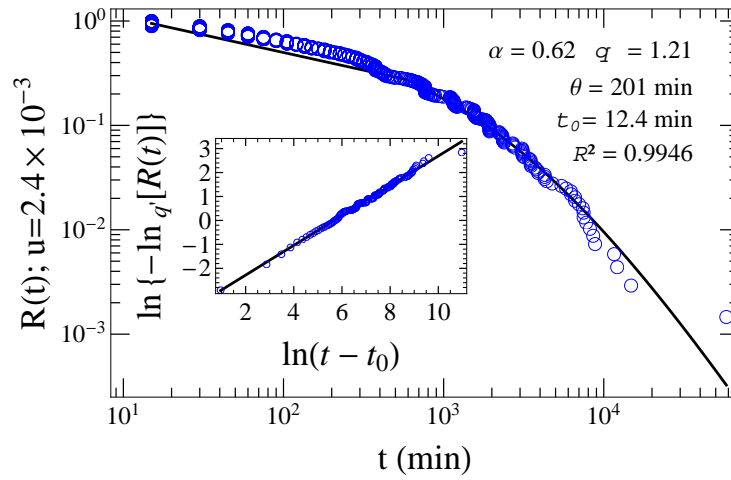


Panel B: Log-log para el for DAX

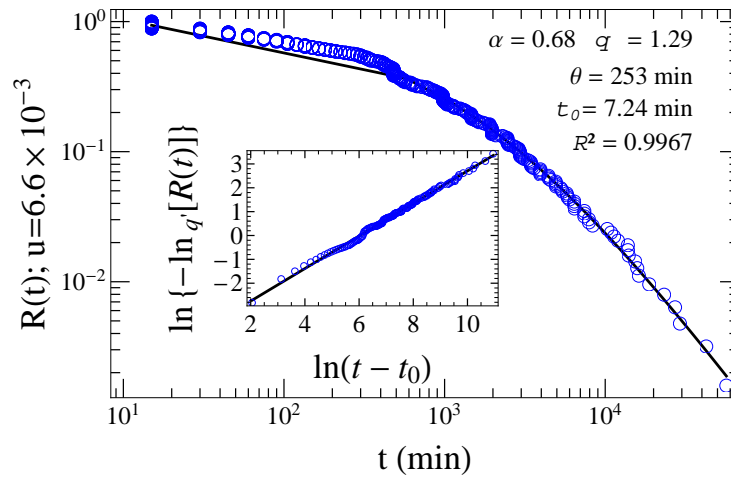


Panel C: Log-log plot para el IBEX-35

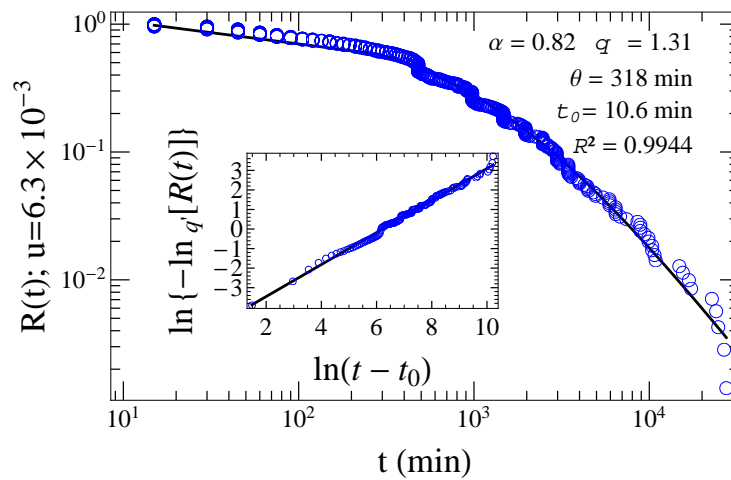
Figura 4.8: Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas positivas.



Panel A: Log-log plot para el S&P 500

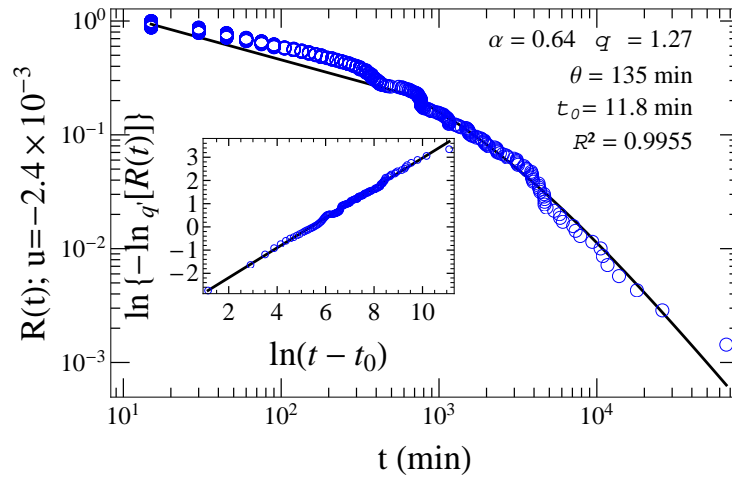


Panel B: Log-log plot para el DAX

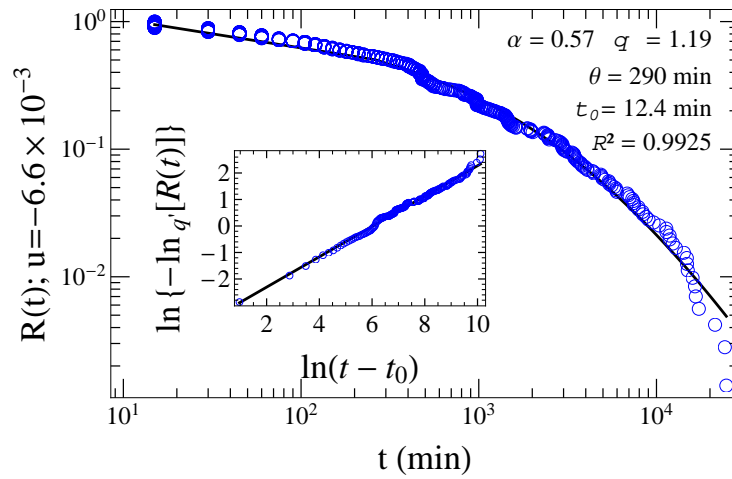


Panel C: Log-log plot para el IBEX-35

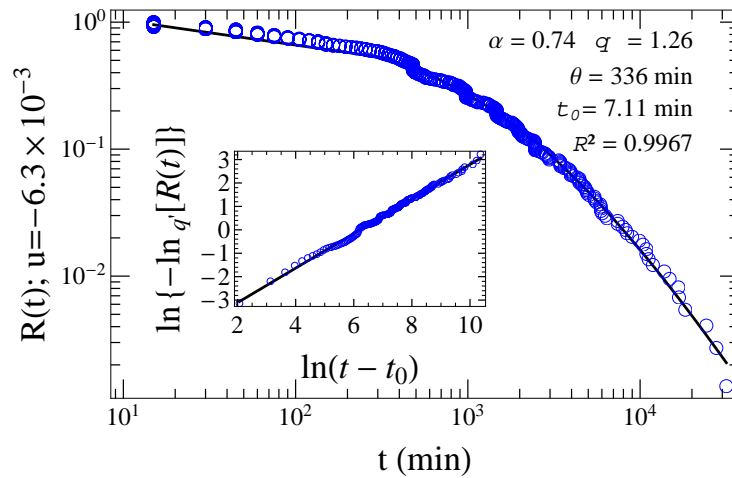
Figura 4.9: Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas negativas.



Panel A: Log-log plot para el S&P 500

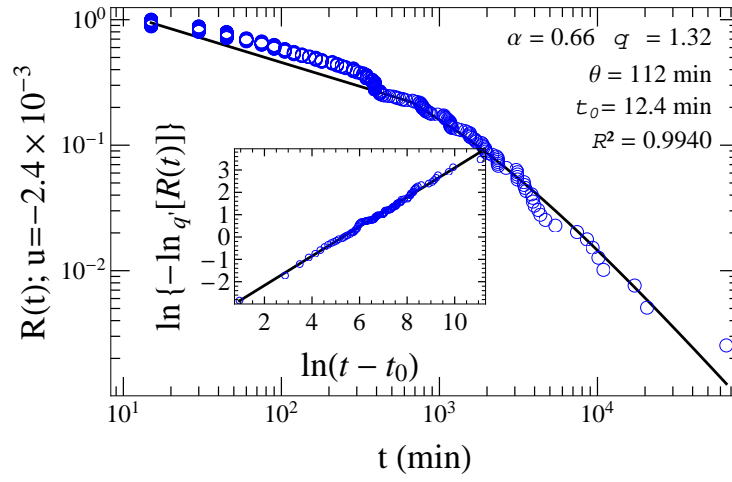


Panel B: Log-log plot para el DAX

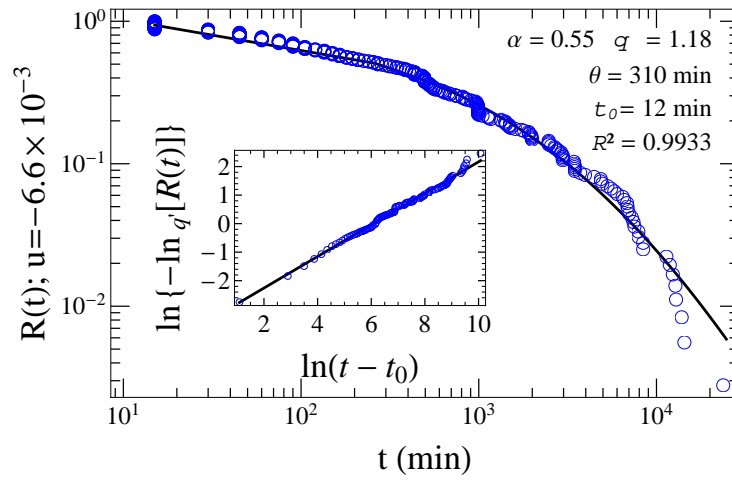


Panel C: Log-log plot para el IBEX-35

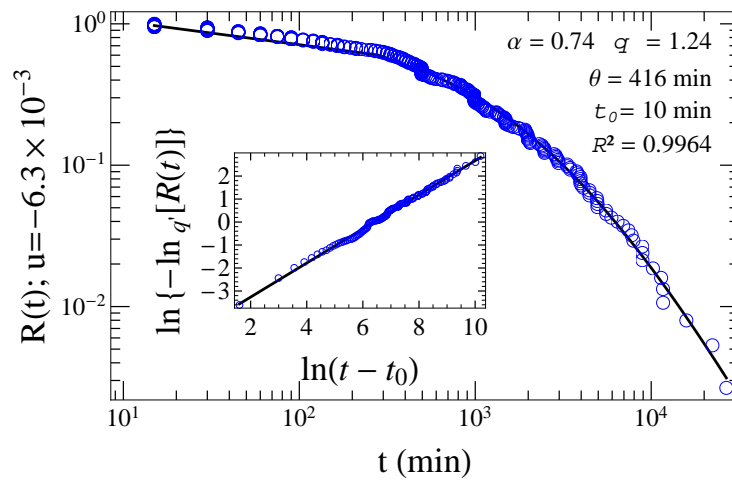
Figura 4.10: Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas positivas seguida de una rentabilidad extrema negativa.



Panel A: Log-log plot para el S&P 500

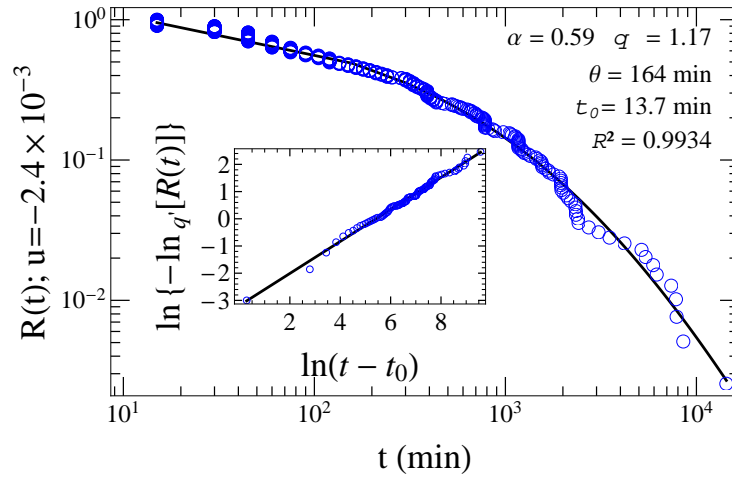


Panel B: Log-log plot para el DAX

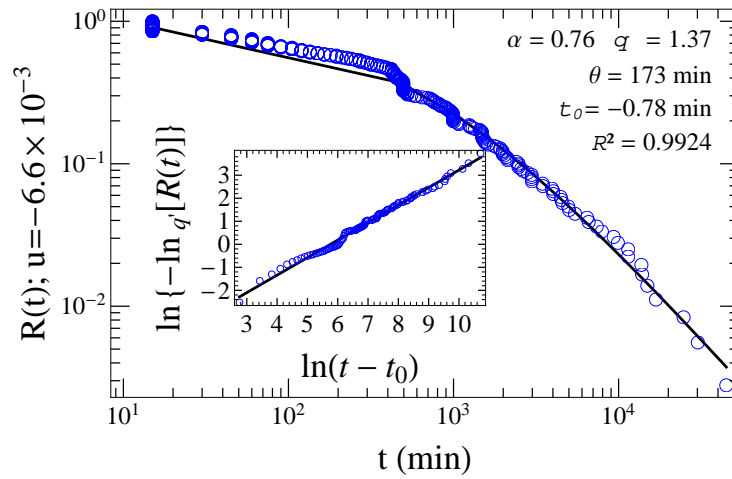


Panel C: Log-log plot para el IBEX-35

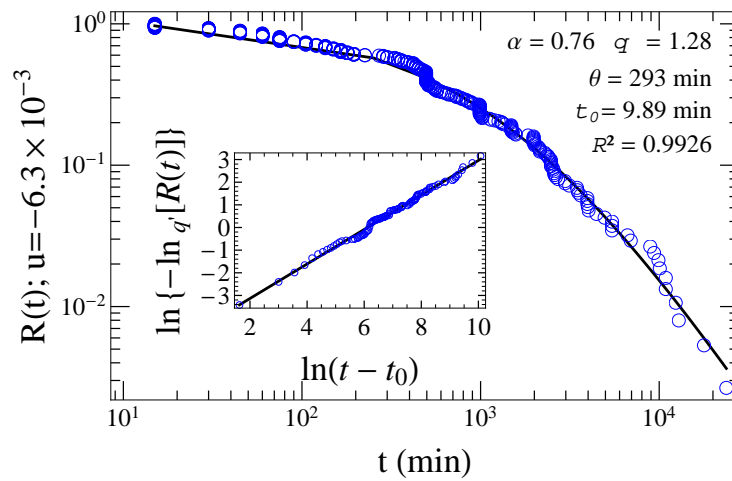
Figura 4.11: Ajuste q -Weibull en escala doble logarítmica para la función de supervivencia ($R_q(t)$) en las duraciones entre rentabilidades extremas negativas seguida de una rentabilidad extrema positiva.



Panel A: Log-log plot para el S&P 500



Panel B: Log-log plot para el DAX



Panel C: Log-log plot para el IBEX-35

Cuadro 4.3: Parámetros estimados para el modelo lineal ACD q -Weibull.

| Panel A: S&P 500 | Duraciones $_{ ext }$ | Duraciones $_{ext(+)}$ | Duraciones $_{ext(-)}$ | Duraciones $_{ext(+ \rightarrow -)}$ | Duraciones $_{ext(- \rightarrow +)}$ |
|---------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| ω | 0.3212 (0.0556) | 0.3102 (0.0887) | 0.3637 (0.0736) | 0.5201 (0.1654) | 0.3558 (0.1244) |
| γ | 0.2034 (0.0207) | 0.1799 (0.0298) | 0.2003 (0.0234) | 0.2525 (0.0422) | 0.1937 (0.0367) |
| δ | 0.7840 (0.0236) | 0.8087 (0.0350) | 0.7819 (0.0268) | 0.7186 (0.0526) | 0.7898 (0.0437) |
| α | 1.2225 (0.0559) | 1.0878 (0.0606) | 1.1656 (0.0654) | 1.1698 (0.0929) | 1.1256 (0.0966) |
| q | 1.3555 (0.0393) | 1.2846 (0.0521) | 1.3444 (0.0473) | 1.3975 (0.0611) | 1.3487 (0.0750) |
| ini | 9.5131 (0.7134) | 9.8731 (0.7092) | 9.9131 (0.7511) | 9.3973 (1.0167) | 8.9172 (1.0595) |
| n^o observaciones | 1212 | 685 | 697 | 394 | 394 |
| Log-likelihood | -7686.73 | -4781.48 | -4752.20 | -2713.98 | -2674.55 |
| Panel B: DAX | Duraciones $_{ ext }$ | Duraciones $_{ext(+)}$ | Duraciones $_{ext(-)}$ | Duraciones $_{ext(+ \rightarrow -)}$ | Duraciones $_{ext(- \rightarrow +)}$ |
| ω | 0.2342 (0.0401) | 0.3557 (0.0788) | 0.3127 (0.0723) | 0.5501 (0.1527) | 0.5623 (0.2028) |
| γ | 0.1357 (0.0154) | 0.1490 (0.0229) | 0.1476 (0.0230) | 0.2328 (0.0402) | 0.1852 (0.0442) |
| δ | 0.8560 (0.0168) | 0.8313 (0.0268) | 0.8355 (0.0259) | 0.7344 (0.0481) | 0.7735 (0.0601) |
| α | 1.0635 (0.0458) | 0.8859 (0.0476) | 0.9459 (0.0504) | 1.0019 (0.0785) | 0.8751 (0.0661) |
| q | 1.2150 (0.0464) | 1.1313 (0.0635) | 1.2355 (0.0537) | 1.3117 (0.0700) | 1.2482 (0.0764) |
| ini | 9.7048 (0.5840) | 10.665 (0.0619) | 10.0893 (0.7172) | 10.0740 (0.8682) | 10.6341 (0.8822) |
| n^o observaciones | 1178 | 629 | 713 | 359 | 359 |
| Log-likelihood | -8095.71 | -4665.08 | -5243.12 | -2637.46 | -2626.76 |
| Panel C: IBEX-35 | Duraciones $_{ ext }$ | Duraciones $_{ext(+)}$ | Duraciones $_{ext(-)}$ | Duraciones $_{ext(+ \rightarrow -)}$ | Duraciones $_{ext(- \rightarrow +)}$ |
| ω | 0.2942 (0.0478) | 0.4147 (0.0924) | 0.3670 (0.0706) | 0.7915 (0.2105) | 0.6607 (0.1705) |
| γ | 0.1502 (0.0163) | 0.1468 (0.0236) | 0.1482 (0.0191) | 0.2361 (0.0448) | 0.2017 (0.0353) |
| δ | 0.8305 (0.0190) | 0.8196 (0.0297) | 0.8287 (0.0223) | 0.6960 (0.0600) | 0.7389 (0.0471) |
| α | 1.1003 (0.0424) | 1.0687 (0.0553) | 0.9510 (0.0488) | 0.9821 (0.0776) | 1.0448 (0.0791) |
| q | 1.2074 (0.0417) | 1.2473 (0.0505) | 1.1459 (0.0593) | 1.2161 (0.0860) | 1.2859 (0.0717) |
| ini | 9.5259 (0.5909) | 10.6182 (0.6530) | 10.1320 (0.6990) | 10.011 (0.9535) | 10.2573 (0.7897) |
| n^o observaciones | 1353 | 704 | 736 | 381 | 381 |
| Log-likelihood | -9363.98 | -5345.85 | -5518.76 | -2915.58 | -2854.46 |

Notas: Errores standard están entre paréntesis. ini denota el valor inicial en la Ecuación (4.32)

4.5.5. Conclusiones

Se estudiaron las duraciones entre rentabilidades extremas con el fin de comprobar la existencia de leyes de potencia en dichas duraciones. Mediante el uso del estimador Hill, se determinaron las rentabilidades extremas y se midió el tiempo entre ellos a partir de datos intradiarios para el S&P 500, DAX e IBEX-35 durante el período del 5 de enero de 2004 al 20 de enero de 2012. Utilizando la distribución q -Weibull se demostró que las duraciones entre rentabilidades extremas absolutas, rentabilidades extremas positivas, rentabilidades extremas negativas, rentabilidades extremas positivas y negativas y las rentabilidades extremas negativas y positivas muestran un comportamiento coherente con la distribución q -Weibull. A través de la aplicación de un ajuste por medio de la maximización del coeficiente de determinación R^2 se obtuvieron valores de q que dieron lugar a un valor aproximado para q entre 1.20 y 1.30 para cada una de las duraciones analizadas en cada uno de los tres índices. Además, se analizaron las duraciones condicionales utilizando un modelo ACD q -Weibull con el fin de contrastar la hipótesis nula de no existencia de leyes de potencia en las duraciones condicionales. Los resultados obtenidos a través de máxima verosimilitud, demostraron que la hipótesis nula fue rechazada. Por lo tanto, se puede concluir que existen leyes de potencia en las duraciones entre rentabilidades extremas. La existencia de leyes de potencia en estas duraciones tiene relevancia porque es fundamental para una adecuada gestión de la inversión y de la gestión de riesgos, las leyes de potencia puede cambiar la forma en que los inversionistas generan sus estrategias debido al hecho de que este fenómeno implica que hay capacidad de predicción en las colas de las distribuciones.

Bibliografía

- Q.F Akram. Oil prices and exchange rates: Norwegian evidence. *Econometrics Journal*, 7:476–504, 2004.
- Q.F Akram. Commodity prices, interest rates and the dollar. *Energy Economics*, 31:838–851, 2009.
- C. Aloï, R. Jammazi, y I. Dhakhlouiet. Crude oil volatility shocks and stock market returns. *Journal of Energy Markets*, 1:69–96, 1998.
- C. Aloui y R. Jammazi. The effects of crude oil shocks on stock market shifts behaviour: a regime switching approach. *Energy Economics*, 31:789–799, 2009.
- J. Alvarez-Ramirez, E. Rodriguez, y J. C. Echeverria. A dfa approach for assessing asymmetric correlations. *Physica A*, 388:2263–2270, 2009.
- R.A. Amano y S. Van Norden. Oil prices and the rise and fall of the US real exchange rate. *Journal of International Money and Finance*, 17(2):299–316, 1998.
- Y. Amihud y H. Mendelson. Trading mechanisms and stock returns: An empirical investigation. *Journal of Finance*, 52(3):533–553, 1987.
- D.W.k. Andrews. Test for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica*, 61:821–856, 1993.
- D.W.k. Andrews y W. Ploberger. Optimal test when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica*, 62:1383–1414, 1994.
- A.A. El Anshasy y M.D. Bradley. Oil prices and the fiscal policy response in oil-exporting countries. *Journal of Policy Modeling*, 2011. doi:10.1016/j.jpolmod.2011.08.021. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0161893811001013>.

- N. Apergis y S.M. Miller. Do structural oil-market shocks affect stock prices? *Energy Economics*, 31:569–575, 2009.
- M.E.H. Arouri, J. Jouini, D. Khuong, y D.C. Nguyen. Volatility spillovers between oil prices and stock sector returns: implications for portfolio management. *Journal of International Money and Finance*, 30:1387–1405, 2011.
- M.E.H. Arouri y C. Rault. Oil prices and stock markets in GCC countries: empirical evidence from panel analysis. *International Journal of Finance and Economics*, 2011. URL <http://dx.doi.org/10.1002/ijfe.443>.
- N. Barberis, A. Shleifer, y R. Vishny. A model of investor sentiment. *Journal of Financial Economics*, 49:307–343, 1998.
- S.A Basher y P. Sadorsky. Oil price risk and emerging stock markets. *Global Finance Journal*, 17:224–251, 2006.
- L. Bauwens y P. Giot. The logarithmic ACD model: an application to the Bid Ask quote process of three NYSE stocks. *Annales d'Économie et de Statistique*, 60:117–149, 2000.
- L. Bauwens, P. Giot, J. Grammig, y D. Veredas. A comparison of financial duration models via density forecasts. *International Journal of Forecasting*, 20:589–609, 2004a.
- L. Bauwens, P. Giot, J. Grammig, y D. Veredas. A comparison of financial duration models via density forecasts. *International Journal of Forecasting*, 20:589–609, 2004b.
- L. Bauwens y D. Veredas. The stochastic conditional duration model: a latent variable model for the analysis of financial durations. *Journal of Econometrics*, 199(2):381–412, 2004.
- M. Beine. Conditional covariances and direct central bank interventions in the foreign exchange markets. *Journal of Banking and Finance*, 28:1385–1411, 2006.
- S.B. Bloomberg y E.S. Harris. The commodity-consumer price connection: Fact or fable? *Economic Policy Review*, págs. 21–38, 1995.
- T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, 1986.

- C.A. Bollino. Oil prices and the U.S. trade deficit. *Journal of Policy Modeling*, 29:729–738, 2007.
- J-P. Bouchaud. Power laws in economics and finance: some ideas from physics. *Quantitative Finance*, 1(1):105–112, 2001.
- J.P. Bouchaud y M Potters. *Theory of financial risks: From statistical physics to risk management*. University Press, Cambridge, 2000.
- W. Brock, W. Dechert, y J. Scheinkman. A test for independence based on the correlation dimension, 1987. Unpublished paper, University of Wisconsin at Madison and University of Chicago.
- D.P Brown y R.E Jennings. On technical analysis. *Review of Financial Studies*, 2:527–551, 1989.
- A. Bruce y H.Y. Gao. *Applied wavelet analysis with S-Plus*. Springer, Seattle, 1996.
- A. Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 295:441–454, 2001.
- Z. Burda, J. Jurkiewicz, y M.A Nowak. Is econophysics a solid science. *Acta Physica Polonica B*, 34(1):87–133, 2003.
- C.S. Burrus, R.A. Gopinath, y H. Guo. *Introduction to wavelets and wavelet transforms: A primer*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- J.A. Busse y T.C. Green. Market efficiency in real time. *Journal of Financial Economics*, 65:415–437, 2002.
- D. O. Cajueiro y B. M. Tabak. Ranking efficiency for emerging equity markets ii. *Chaos, Solitons and Fractals*, 23:671–675, 2005.
- D. O. Cajueiro y B. M. Tabak. Testing for predictability in equity returns for european transition markets. *Economic Systems*, 30(1):56–78, 2006.
- D. O. Cajueiro y B. M. Tabak. Testing for long-range dependence in world stock markets. *Chaos, Solitons and Fractals*, 37:918–927, 2008.
- M. Camarero y C. Tamarit. Oil prices and spanish competitiveness. a cointegrated panel analysis. *Journal of Policy Modeling*, 24(6):591–605, 2002.
- R. Chakrabarti y R. Roll. Learning from others, reacting, and market quality. *Journal of Financial Markets*, 2:153–178, 1999.

- M. Chemingui y T. Roa. Petroleum revenues in Gulf Cooperation Council countries and their labor market paradox. *Journal of Policy Modeling*, 30(3):491–503, 2008.
- N.F Chen, R. Roll, y S.A. Ross. Economic forces and the stock market. *Journal of Business*, 59:383–403, 1986.
- S.-S Chen. Do higher oil prices push the stock market into bear territory? *Energy Economics*, 32:490–495, 2010.
- S.S. Chen y H.C. Chen. Oil prices and real exchange rates. *Energy Economics*, 29(3):390–404, 2007.
- T. Chordia, R. Roll, y A. Subrahmanyam. Evidence on the speed of convergence to market efficiency. *Journal of Financial Economics*, 76:271–292, 2005.
- T. Chordia, R. Roll, y A. Subrahmanyam. Liquidity and market efficiency. *Journal of Financial Economics*, 87:249–268, 2008.
- G. Cifarelli y G. Paladino. Oil price dynamics and speculation: A multivariate financial approach. *Energy Economics*, 32:363–372, 2010.
- C. Ciner. Energy shocks and financial markets: nonlinear linkages. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 5:203–212, 2001.
- S. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag, London, 2001.
- R.-G. Cong, Y.-M. Wei, J.-L. Jiao, y Y. Fan. Relationships between oil price shocks and stock market: an empirical analysis from china. *Energy Policy*, 36:3544–3553, 2008.
- B. Cornell y R. Roll. Strategies for pairwise competitions in markets and organizations. *Journal Bell of Economics*, 72:201–213, 1981.
- U.M.S. Costa, V.N. Freire, L.C. Malacarne, R.S. Mendes, Jr.S. Picoli, E.A. de Vasconcelos, y Jr.E.F. da Silva. An improved description of the dielectric breakdown in oxides based on a generalized weibull distribution. *Physica A*, 361:209–215, 2006.
- D. Cox y M. Cox. *The mathematics of banking and finance*. Wiley and Sons, England, 2006.

- K. Daniel, D. Hirshleifer, y A. Subrahmanyam. Investor psychology and security market under and overreactions. *Journal of Finance*, 56:921–965, 1998.
- I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- S.J. Devlin, R. Gnanadesikan, y J. R. Kettenring. Robust estimation and outlier detection with correlation coefficients. *Biometrika*, 62(3):531–545, 1975.
- G. Driesprong, B. Jacobsen, y B. Maat. Striking oil: another puzzle? *Journal of Financial Economics*, 89:307–327, 2008.
- L. H. Ederington y J. H. Lee. How markets process information - news releases and volatility. *Journal of Finance*, 48:1161–1191, 1993.
- I. El-Sharif, D. Brown, B. Nixon, y A. Russel. Evidence on the nature and extent of the relationship between oil and equity value in UK. *Energy Economics*, 27(6):819–930, 2005.
- E. Elyasiani, I. Mansur, y B. Odusami. Oil price shocks and industry stock returns. *Energy Economics*, 33:966–974, 2011.
- P. Embrechts, C. Kluppelberg, y T. Mikosch. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag., 1997.
- R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1008, 1982.
- R.F. Engle. The econometrics of ultra high frequency data. *Econometrica*, 68(1):1–22, 2000.
- R.F Engle y J.R. Russell. Autoregressive conditional duration model: A new model for irregularly spaced time series data. *Econometrica*, 66:1127–1162, 1998.
- R. Faff y T.J. Brailsford. Oil price risk and the Australian stock market. *Journal of Energy Finance and Development*, 49:69–87, 1999.
- E. Fama. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25:383–417, 1970.
- E. Fama. Efficient capital markets: Ii. *Journal of Finance*, 46:1575–1617, 1991.
- M. Fernandes y J. Grammig. NonParametric specification tests for conditional duration models. *Journal of Econometrics*, 127:35–68, 2005.

- V. Fernandez. Time-scale decomposition of price transmission in international markets. *Emerging Markets Finance and Trade*, 41(4):57–90, 2005.
- F. D. Foster y S. Viswanathan. Variations in trading volume, return volatility, and trading costs - evidence on recent price formation models. *Journal of Finance*, 48:187–211, 1993.
- X. Gabaix. Power laws in economics and finance. Working Paper 14299, National Bureau of Economic Research, 2008.
- X. Gabaix. Power laws in economics and finance. *Annual Review of Economics*, 1:255–294, 2009.
- M. Gallegati. A wavelet-based approach to test for financial market contagion. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2010.
- R. Gençay, F. Selçuk, y B. Whitcher. *An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics*. Academic Press, San Diego, 2002.
- R. Gençay, F. Selçuk, y B. Whitcher. Multiscale systematic risk. *Journal of International Money and Finance*, 24:55–70, 2005.
- S.S Ghouri. Assessment of the relationship between oil prices and US oil stocks. *Energy Policy*, 34:3327–3333, 2006.
- E. Ghysels, C. Gouriéroux, y J. Jasiak. Stochastic volatility duration models. *Journal of Econometrics*, 199:413–433, 2004.
- S. Golub. Oil prices and exchange rates. *Economics Journal*, 93:576–593, 1983.
- J. Gramming y K-O. Maurer. Non-monotonic hazard functions and the autoregressive conditional duration model. *Econometrics Journal*, (3):16–38, 2000.
- W.H. Greene. *Econometric Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 7 ed^{ón}, 2008.
- S. Grossman. On the efficiency of competitive stock markets where trades have diverse information. *Journal of Finance*, 31(2):573–585, 1976.
- S. Grossman y J. Stiglitz. On the impossibility of informationally efficient markets. *American Economic Review*, 70:393–408, 1980.
- B.D. Grundy y M. McNichols. Trade and the revelation of information through prices and direct disclosure. *Review of Financial Studies*, 2(4):495–526, 1989.

- J.D. Hamiltom. Oil and the macroeconomy since world war II. *Journal of Political Economy*, 92:228–248, 1983.
- J.D. Hamiltom. What is an oil shock? *Journal of Econometrics*, 113:363–398, 2003.
- J.D. Hamiltom y A.M. Herrera. Oil shocks and aggregate macroeconomics behavior: the role of monetary policy. *Journal of Money, Credit and Banking*, 36(2):265–286, 2004.
- S. Hammoudeh y K. Choi. Characteristics of permanent and transitory returns in oil-sensitive emerging stock markets: the case of GCC countries. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 17:231–245, 2007.
- S. Hammoudeh, S. Dibooglu, y E. Aleisa. Relationships among US oil prices and oil industry equity indices. *International Review of Economics and Finance*, 13:427–453, 2004.
- S. Hammoudeh y H. Li. Oil sensitivity and systematic risk in oil-sensitive stock indices. *Journal of Economics and Business*, 57:1–21, 2005.
- S. Hammoudeh, Y. Yuan, y T. Chiang M. Nandha. Symmetric and asymmetric US sector return volatilities in presence of oil, financial and economic risks. *Energy Policy*, 38(8):3922–3932, 2010.
- B.E. Hansen. Appproximate asymptotic p values for structural-change tests. *Journal of Business and Economic*, 15:60–67, 1997.
- I. Henriques y P. Sadorsky. Oil prices and the stock prices of alternative energy companies. *Energy Economics*, 30:998–1010, 2008.
- S.C Hillmer y P.L Yu. The market speed of adjustment to new information. *Journal of Financial Economics*, 1:321–345, 1979.
- H. Hong y J Stein. A unified theory of underreaction, momentum trading, and overreaction in assets markets. *Journal of Finance*, 54:2143–2184, 1999.
- Y. Hong y T.H Lee. Inference on predictability of foreign exchange rates via generalized spectrum and nonlinear time series models. *Review of Economics and Statistics*, 85:1048–1062, 2003.
- M.A. Hooker. Are oil shocks inflationary? Asymmetric and nolinear specifications versus changes in regime. *Journal of Money, Credit and Banking*, 34:540–561, 2002.

- D.A Hsieh. Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets. *Journal of Finance*, 46:1839–1877, 1991.
- R.D. Huang, R.W. Masulis, y H.R. Stoll. Energy shocks and financial markets. *Journal of Futures Markets*, 16:1–27, 1996.
- Y. Huang y F. Guo. The role of oil price shocks on china’s real exchange rate. *China Economic Review*, 18(4):403–416, 2007.
- H.E Hurst. Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116:770–799, 1951.
- J.P. Indjehagopian, F. Lantz, y V. Simon. Dynamics of heating oil market prices in Europe. *Energy Economics*, 22(2):225–252, 2000.
- P.Ch. Ivanov. Scaling behaviors of heartbeat intervals obtained by wavelet-based time-series analysis. *Nature*, 383:323–327, 1996.
- R. Jammazi y C. Aloui. Wavelet decomposition and regime shifts: assessing the effects of crude oil shocks on stock market returns. *Energy Policy*, 38(3):1415–1435, 2010.
- R. Jammazi y C. Aloui. Crude oil price forecasting: Experimental evidence from wavelet decomposition and neural network modeling. *Energy Economics*, 2011. doi:10.1016/j.eneco.2011.07.018. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988311001484>.
- M.A.M Al Janabi, A. Hatemi-J, y M. Irandoust. An empirical investigation of the informational efficiency of the GCC equity markets: evidence from bootstrap simulation. *International Review of Financial Analysis*, 19:47–54, 2010.
- W.C. Jun, G. Oh, y S. Kim. Understanding volatility correlation behavior with a magnitude cross-correlation function. *Physical Review E*, 73(6):066128, 2006.
- D. Kahneman y A. Tversky. *Choices, Values, and Frames*. Cambridge University Press, New York, 2000.
- J. W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H. H. Rego, S. Havlin, y A. Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A*, 295:441–454, 2001.

- J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde E, S. Havlin, A. Bunde, y H. E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A*, 316:87–114, 2002.
- G. Kaul y C.M. Jones. Oil and the stock markets. *Journal of Finance*, 51:463–491, 1996.
- N.M. Kiefer. Economic duration data and hazard functions. *Journal of Economic Literature*, 26(2):646–679, 1988.
- L. Kilian. A comparison oh the effects of exogenous oil supply shocks on output and inflation in the G7 countries. *Journal of the European Economic Association*, 6(1):78–121, 2008.
- L. Kilian y C. Park. The impact of oil prices shocks and the U.S. stock market. *International Economic Review*, 50(4):1267–1287, 2009.
- S. Kim y F. In. The relationship between stock returns and inflation: new evidence from wavelet analysis. *Journal of Empirical Finance*, 12:435–444, 2005.
- J.L. Kling. Oil price shocks and stock behavior. *Journal of Portfolio Management*, 12(1):34–39, 1985.
- N. Krichene. A simultaneous equations model for world crude oil and natural gas markets. IMF Working Papers 0532, International Monetary Fund, 2005.
- P.R. Krugman. Oil and the Dollar. NBER Working Papers 0554, National Bureau of Economic Research, Inc, 1983. URL <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/0554.html>.
- R.A. Lizardo y A.V. Mollick. Oil price fluctuations and U.S. dollar exchange rates. *Energy Economics*, 32:399–408, 2010.
- A.W Lo y A.C Mackinlay. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test. *Review of Financial Studies*, 1:41–66, 1988.
- A. Lunde. A generalized gamma autoregressive conditional duration model. Working paper, Aalborg University, 1999.
- S. Mallat. *A Wavelet tour of signal processing*. Academic Press, San Diego, 1998.

- B.B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36:394, 1963.
- B.B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer, London, 1997.
- R. N. Mantegna y H. E. Stanley. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- V. Marimoutou, B. Raggad, y A. Trabelsi. Extreme value theory and value at risk: application to oil market. *Energy Economics*, 31(4):519–530, 2009.
- G. McQueen y S. Thorley. Are stock returns predictable? a test using markov chains. *Journal of Finance*, 46:239–263, 1991.
- J.I Miller y R.A Ratti. Crude oil and stock markets: stability, instability, and bubbles. *Energy Economics*, 31:559–568, 2009.
- T.C Mills. *The econometric modeling of financial time series*. Cambridge University Press, New York, 1999.
- J. G. Moreira, J. K. L DaSilva, y S. O. Kamphorst. On the fractal dimension of self-affine profiles. *Journal of Physics A*, 27:8079–8089, 1994.
- K. Mork. Business cycles and the oil market. *Energy Journal*, 15:15–38, 1994.
- T. Naccache. Oil price cycles and wavelets. *Energy Economics*, 33(2):338–352, 2011.
- M. Nandha y R. Haff. Does oil move equity prices? A global view. *Energy Economics*, 30:986–997, 2008.
- P.K. Narayan y S. Narayan. Modelling the impact of oil prices on Vietnam’s stock prices. *Applied Energy*, 87:356–361, 2010.
- P.K. Narayan y S.S. Sharma. New evidence on oil price and firm returns. *Journal of Banking and Finance*, 2011.
- G.P. Nason. *Wavelet methods in statistics with R*. Springer, Seattle, 2008.
- M. O’Hara. *Market Microstructure Theory*. Blackwell, Cambridge, 1995.
- V. Pareto. *Cours d’Économie Politique*. Macmillan, London, 1897.
- J. Park y R. Ratti. Oil price shocks and stock markets in the U.S and 13 European countries. *Energy Economics*, 30:2587–2608, 2008.

- C. K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, y A. L. Goldberger. Mozaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E*, 49:1685–1689, 1994a.
- C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, F. Sciortino, M. Simons, y H.E. Stanley. Long-range correlations in nucleotide sequences. *Nature*, 356:168–170, 1992.
- C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, y A.L. Goldberger. Mozaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E*, 49:1685–1689, 1994b.
- C.K Peng, L.A.N Amaral, L. Glass, J.M Hausdorff, P.C. Ivanov, R.G Mark, J.E. Mietus, G.B Moody, A.L. Goldberger, y H.E. Stanley. Components of a new research resource for complex physiologic signals. *PhysioNet*, 101(3):215–220, 2000.
- D.B. Percival y A.T. Walden. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- Jr.S. Picoli, R.S. Mendes, y L.C. Malacarne. q-exponential, weibull, and q-weibull distributions: An empirical analysis. *Physica A*, 324:678–688, 2003.
- R. S. Pindyck y J.J. Rotemberg. The excess co-movement of commodity prices. *The Economic Journal*, 100(403):1173–1189, 1990.
- B. Podobnik, I. Grosse, D. Horvatić, S. Ilic, P.Ch. Ivanov, y H.E. Stanley. Quantifying cross-correlations using local and global detrending approaches. *European Physics Journal B*, 71(2):243–250, 2009a.
- B. Podobnik, D. Horvatic, A.M. Petersen, y H.E. Stanley. Cross-correlations between volume change and price change. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(52):22079–22084, 2009b.
- B. Podobnik, Z-Q. Jiang, W.-X Zhou, y H.E. Stanley. Statistical tests for power-law cross-correlated processes. *Physical Review E*, 84(6):066118, 2011.
- B. Podobnik y H.E. Stanley. Detrended cross-correlation analysis: A new method for analyzing two nonstationary time series. *Physical Review Letters*, 100(8):084102, 2008.
- A.M. Poteshman. Underreaction, overreaction, and increasing misreaction to information in the options market. *Journal of Finance*, 56:851–876, 2001.

- J. Ramsey y C. Lampart. The decomposition of economic relationship by timescale using wavelets: expenditure and income. *Studies in Non-Linear Dynamics and Econometrics*, 3:23–42, 1998a.
- J. Ramsey y C. Lampart. The decomposition of economic relationship by timescale using wavelets: money and income. *Macroeconomic Dynamics*, 2:49–71, 1998b.
- J.C. Reboredo. Nonlinear effects of oil shocks on stock returns: a Markov-switching approach. *Applied Economics*, 42:3735–3744, 2010.
- J.C. Reboredo. How do crude oil prices co-move? A copula approach. *Energy Economics*, 33:948–955, 2011.
- J.C. Reboredo. Modelling oil price and exchange rate co-movements. *Journal of Policy Modeling*, 34(3):419–440, 2012.
- P.A Robinson. Interpretation of scaling properties of electroencephalographic fluctuations via spectral analysis and underlying physiology. *Physical Review E*, 67:032902, 2003.
- A. Rua y L.C. Nunes. International comovement of stock market returns: A wavelet analysis. *Journal of Empirical Finance*, 16(4):632–639, 2009.
- M. Sadegui y S. Shavvalpour. Energy risk management and value at risk modelling. *Energy Policy*, 34(18):3367–3373, 2006.
- P. Sadorsky. Oil price shocks and stock market activity. *Energy Economics*, 21:449–469, 1999.
- P. Sadorsky. The empirical relationship between energy futures prices and exchange rates. *Energy Economics*, 22(253-266), 2000.
- P. Sadorsky. Risk factors in stocks returns of Canadian oil and gas companies. *Energy Economics*, 23:17–28, 2001.
- M. Salmon y C. Schleicher. Pricing multivariate currency options with copulas. Working papers, Warwick Business School, Financial Econometrics Research Centre, 2007. URL <http://EconPapers.repec.org/RePEc:wbs:wpaper:wp06-21>.
- E. Steigum y Ø. Thøgersen. Petroleum wealth, debt policy, and intergenerational welfare: The case of Norway. *Journal of Policy Modeling*, 17(4):427–442, 1995.

- C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52:479–487, 1988.
- R.S. Tsay. *Analysis of financial time series*. Wiley and Sons, New Jersey, 3 ed^{ón}., 2010.
- N. Visaltanachoti y T. Yang. Speed convergence to market efficiency for nyse-listed foreign stock. *Journal of Banking and Finance*, 34:594–605, 2010.
- M. Vo. Oil and stock market volatility: a multivariate stochastic volatility perspective. *Energy Economics*, 33:956–965, 2011.
- T. Vuorenmaa. A q-weibull autoregressive conditional duration model and threshold dependence. Discussion paper 117, University of Helsinki, 2006.
- R.R. Wilcox. *Introduction to robust estimation and hypothesis testing*. Academic Press, San Diego, 2 ed^{ón}., 2005.
- V.M. Yakovenko. *Econophysics, statistical mechanics approach to, encyclopedia of complexity and system science*. Springer, 2008.
- M. Yogo. Measuring business cycles: a wavelet analysis of economic time series. *Economics Letters*, 100:208–212, 2008.
- A. Yousefi y T.S. Wirjanto. The empirical role of the exchange rate on the crude-oil price formation. *Energy Economics*, 26:783–799, 2004.
- S. Yousefi, I. Weinreich, y D. Reinartz. Wavelet-based prediction of oil prices. *Chaos, Solitons and Fractals*, 25:265–275, 2005.
- G.F. Zebende. DCCA cross-correlation coefficient: quantifying level of cross-correlation. *Physica A*, 390(4):614–618, 2011.
- G.F. Zebende, P.A. da Silva, y A. Machado-Filho. Study of cross-correlation in a self-affine time series of taxi accidents. *Physica A*, 390(9):1677–1683, 2011.
- G.F. Zebende y A. Machado-Filho. Cross-correlation between time series of vehicles and passengers. *Physica A*, 388(23):4863–4866, 2009.
- M.Y. Zhang, J.R. Russell, y R.S. Tsay. A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial duration data. *Journal of Econometrics*, 104:179–207, 2001.

- Y.-F. Zhang, Y. Fan, H.-T. Tsai, y Y.-M. Wei. Spillover effect of US dollar exchange rate on oil prices. *Journal of Policy Modelling*, 30:973–991, 2008.
- W.-X. Zhou. Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals. *Physical Review E*, 77(6):066211, 2008.
- H.M Zhu, S.F Li, y K. Yu. Crude oil shocks and stock markets: a panel threshold cointegration approach. *Energy Economics*, 33:987–994, 2011.